

Esercizi TdG per PoliMI, parte 2

Esercizio 1

$I \setminus II$	L	R
T	$-2, 2$	$3, -3$
B	$3, -3$	$-4, 4$

Per il gioco in forma strategica sopra descritto:

- trovare gli equilibri di Nash della sua estensione mista
- trovarne gli equilibri correlati
- descrivere la best reply dynamics
- descrivere il fictitious play

Esercizio 2 Si trovi l'equilibrio di Nash Bayesiano per il seguente gioco¹ ad informazione incompleta:

$I \setminus II.1$	$L.1$	$R.1$	$I \setminus II.2$	$L.2$	$R.2$
T	$2, -1$	$1, 0$	T	$1, 1$	$0, 0$
B	$0, 1$	$3, 0$	B	$0, -1$	$1, 0$
p			$1 - p$		

per $p = 0.9$, $p = 0.5$, e per qualsiasi $p \in]0, 1[$. Si trovi il limite degli equilibri di Nash Bayesiani per $p \rightarrow 0$ e per $p \rightarrow 1$.

Si commenti.

Esercizio 3 Si consideri il gioco ad utilità trasferibile definito come segue: $v(1) = v(2) = 1$, $v(12) = 0$. Il suo nucleo è vuoto (anche l'insieme delle imputazioni è vuoto). Commenti?

Esercizio 4 Si consideri un gioco ad utilità trasferibile "simmetrico", cioè dato da $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ e $v(S) = f(\text{card}(S))$. Per il caso $\text{card}(N) = 3$, si caratterizzino i giochi superadditivi, e quelli con nucleo non vuoto.

¹Ringrazio Elena Masselli per avermi segnalato una ambiguità presente in una precedente formulazione dell'esercizio.

Esercizio 5 Sotto quali condizioni su f i giochi “simmetrici” che risultano sono superadditivi?

Esercizio 6 Il nucleo di un gioco “simmetrico” è simmetrico (dare l’appropriata definizione per la simmetria del nucleo)?

Esercizio 7 Osborne e Rubinstein (1994) definiscono i giochi coesivi come quei giochi ad utilità trasferibile che soddisfano la seguente condizione:

Per ogni partizione S_1, \dots, S_k di N , $\sum_{i=1}^k v(S_i) \leq v(N)$.

Si provi che un gioco superadditivo è coesivo e che il viceversa non è vero. È vero che per un gioco coesivo $I(v) \neq \emptyset$?

Esercizio 8 La somma di giochi superadditivi è un gioco superadditivo?

Esercizio 9 (Preso da Osborne e Rubinstein). Ci sono n stabilimenti. Ognuno estrae acqua da un lago e scarica rifiuti nello stesso lago. Ogni stabilimento pretende acqua pura. Per ogni stabilimento, il costo per purificare il proprio approvvigionamento di acqua è kc , dove k è il numero di stabilimenti che non tratta i propri rifiuti prima di scaricarli nel lago; a qualsiasi stabilimento costa b trattare i propri rifiuti. Si assuma che $c \leq b \leq nc$.

Si modellizzi questa situazione come un gioco ad utilità trasferibile, assumendo che per qualsiasi coalizione S il suo valore $v(S)$ è il payoff più alto che si può garantire (cioè, $v(S)$ è il payoff più alto di S sotto l’assunzione che nessuno degli altri stabilimenti tratti i propri rifiuti).

Si trovino le condizioni sotto le quali il gioco ha nucleo non vuoto e le condizioni per le quali è un singleton.

Si discuta l’interpretazione del nucleo di questo gioco, tenendo in considerazione che la definizione di $v(S)$ fa delle assunzioni sul comportamento dei giocatori fuori da S .

Esercizio 10 Sia v un gioco ad utilità trasferibile, con insieme dei giocatori N . Dato $S \subseteq N$, la restrizione di v al sottoinsieme di S è un gioco ad utilità trasferibile con insieme dei giocatori S . Il gioco v si dice essere totalmente bilanciato se tutte le sue restrizioni a $S \subseteq N$ sono bilanciate (ovvero, hanno nucleo non vuoto). Si fornisca un esempio di gioco bilanciato che non sia totalmente bilanciato. Un gioco convesso è totalmente bilanciato?

Esercizio 11 Quando il valore Shapley di un gioco coincide con $v(i)$ per ogni giocatore i ?

Esercizio 12 Si consideri la base “canonica” per $G(N)$, cioè:

$$v^S(T) = \begin{cases} 1 & \text{se } S = T, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Quale è la matrice di trasformazione dalla base canonica alla base dei giochi ad unanimità? Gli assiomi (EFF) (efficienza), (NPP) (null player property) e (AN) (anonimità) determinano univocamente la soluzione per i giochi della base canonica?

Esercizio 13 Si esprima un gioco semplice di maggioranza (con tre giocatori) come una combinazione lineare di giochi ad unanimità.

Esercizio 14 Sia (p_1, p_2, \dots, p_n) un vettore con coordinate non negative e sia $q \in \mathbb{R}$ tale che

$$0 < q < \sum_{i=1}^n p_i \quad (1)$$

Definiremo *gioco di maggioranza pesato* $[q; p_1, p_2, \dots, p_n]$ il gioco semplice (N, v) definito come:

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{se } \sum_{i \in S} p_i \leq q \\ 1 & \text{se } \sum_{i \in S} p_i > q \end{cases} \quad (2)$$

Un gioco di maggioranza pesato è superadditivo?

Esercizio 15 Le quote di una società sono destribuite come segue: un azionista ha il 20% delle azioni, mentre ogni altro azionista ha solo una azione. Si calcoli il valore Shapley del gioco ad utilità trasferibile semplice ottenuto assegnando valore 1 alla coalizione S se i suoi giocatori hanno il 50% delle azioni “+1”, e zero altrimenti, per i casi di 10, 100 e 1000 azioni. Si commenti.

Esercizio 16 Il proprietario di una casa vuole venderla perché tenerla è per lui inutile.

Ci sono due potenziali clienti: uno valuta la casa $a > 0$ ed il secondo $b \geq a$. Si modellizzi questo problema come un gioco ad utilità trasferibile e si determinino il suo nucleo e il valore Shapley.

Esercizio 17 Dato il gioco $(\{1, 2, 3\}, v)$ con v funzione caratteristica tale che:

$$\begin{aligned}v(\emptyset) &= v(1) = v(2) = 0, v(3) = 1; \\v(1, 2) &= 9, v(2, 3) = 5, v(1, 3) = 6, v(1, 2, 3) = 12\end{aligned}$$

Calcolare il valore Shapley del gioco $(\{1, 2, 3\}, v)$ e dire se sta nel nucleo.

Esercizio 18 Si consideri il gioco $(\{1, 2, 3\}, w)$ con w funzione caratteristica tale che:

$$\begin{aligned}w(\emptyset) &= 0, w(1) = 2, w(2) = 3, w(3) = 1; \\w(1, 2) &= 5, w(2, 3) = 4, w(1, 3) = 3, w(1, 2, 3) = 6\end{aligned}$$

Trovare i giocatori dummy del gioco $(\{1, 2, 3\}, w)$.
Sfruttare la proprietà del dummy player e quella di additività riferite al valore Shapley per calcolare il valore Shapley del gioco $(\{1, 2, 3\}, v + w)$.

SOLUZIONI di alcuni esercizi

Esercizio 1 Soluzione

Risposta alla seconda domanda (equilibri correlati). Vediamo se una strategia correlata μ_{ij} come descritta nella matrice seguente può essere un equilibrio correlato.

I \ II	L	R
T	μ_{11}	μ_{12}
B	μ_{21}	μ_{22}

Usiamo la definizione (pag. 4 di equilibri_correlati_2005.pdf). Devono essere soddisfatte le seguenti quattro condizioni. Le prime due riguardano il giocatore I , le altre il giocatore II .

$$\begin{cases} \mu_{11}(-2) + \mu_{12}(3) \geq \mu_{11}(3) + \mu_{12}(-4) \\ \mu_{21}(3) + \mu_{22}(-4) \geq \mu_{21}(-2) + \mu_{22}(3) \\ \mu_{11}(2) + \mu_{21}(-3) \geq \mu_{11}(-3) + \mu_{21}(4) \\ \mu_{12}(-3) + \mu_{22}(4) \geq \mu_{12}(2) + \mu_{22}(-3) \end{cases}$$

Ovvero:

$$\begin{cases} 7\mu_{12} \geq 5\mu_{11} \\ 5\mu_{21} \geq 7\mu_{22} \\ 5\mu_{11} \geq 7\mu_{21} \\ 7\mu_{22} \geq 5\mu_{12} \end{cases}$$

Da cui otteniamo le seguenti due catene di disuguaglianze:

$$7\mu_{12} \geq 5\mu_{11} \geq 7\mu_{21}$$

$$5\mu_{21} \geq 7\mu_{22} \geq 5\mu_{12}$$

Moltiplicando tutti i termini della prima per 5 e tutti quelli della seconda per 7 otteniamo:

$$35\mu_{12} \geq 25\mu_{11} \geq 35\mu_{21}$$

$$35\mu_{21} \geq 49\mu_{22} \geq 35\mu_{12}$$

Pertanto:

$$35\mu_{12} \geq 25\mu_{11} \geq 35\mu_{21} \geq 49\mu_{22} \geq 35\mu_{12}$$

Visto che gli estremi sono uguali, tutte le disuguaglianze sono uguaglianze:

$$35\mu_{12} = 25\mu_{11} = 35\mu_{21} = 49\mu_{22} = 35\mu_{12}$$

Da cui:

$$\begin{cases} \mu_{12} = \mu_{21} \\ \mu_{21} \geq \frac{5}{7}\mu_{11} \\ \mu_{22} \geq \frac{25}{49}\mu_{11} \end{cases}$$

Pertanto troviamo (ricordiamo che la somma dei μ_{ij} deve fare 1:

$$\mu_{11} \left(1 + \frac{5}{7} + \frac{5}{7} + \frac{25}{49} \right) = 1$$

Quindi

$$\begin{cases} \mu_{11} = \frac{49}{144} \\ \mu_{12} = \frac{35}{144} \\ \mu_{21} = \frac{35}{144} \\ \mu_{22} = \frac{25}{144} \end{cases}$$

Quindi vi è un unico equilibrio correlato che coincide con l'unico equilibrio in strategie miste.

La dinamica della “best reply” è molto semplice. Si percorre sempre, indefinitamente, un ciclo “in senso antiorario”, che coinvolge le quattro celle della matrice: (T, L) , poi (B, L) , (B, R) e (T, R) . Il punto di partenza, arbitrario, dell’algoritmo dice semplicemente da quale cella si inizia questo ciclo che poi verrà ripetuto indefinitamente.

Quanto al “fictitious play”, vediamo quale è la dinamica² nel caso in cui si parta da (T, L) , ad esempio:

- 1 (T, L)

$$(1, T; 0, B) \text{ e } (1, L; 0, R)$$

[aggiorniamo il “contatore” che tiene conto di quante volte è stata giocata ciascuna delle strategie, sia per I che per II . Se il valore del contatore è: $(m, T; n, B)$ e $(h, L; k, R)$, assumeremo che I giochi una

²Ringrazio Luigi Lanzerotti per avermi segnalato un errore in una precedente versione di questi appunti.

strategia mista che assegna probabilità $m/(m+n)$ a T e $n/(m+n)$ a B . Similmente per II .]

Calcoliamo la best reply per ciascuno dei due giocatori:

Se I gioca T ha un payoff atteso pari a $1/(h+k)$ di: $h \cdot (-2) + k \cdot 3$. In questo passo iterativo abbiamo: $h = 1, k = 0$ e quindi il payoff atteso per I , se gioca T , è: -2

Se I gioca B ha un payoff atteso pari a $1/(h+k)$ di: $h \cdot 3 + k \cdot (-4)$. In questo passo iterativo abbiamo: $h = 1, k = 0$ e quindi il payoff atteso per I , se gioca B , è: 3

Pertanto B è la best reply per I

Passiamo a II

Se II gioca L ha un payoff atteso pari a $1/(m+n)$ di: $m \cdot 2 + n \cdot (-3)$. In questo passo iterativo abbiamo: $m = 1, n = 0$ e quindi il payoff atteso per II , se gioca L , è: 2

Se II gioca R ha un payoff atteso pari a $1/(m+n)$ di: $m \cdot (-3) + n \cdot 4$. In questo passo iterativo abbiamo: $m = 1, n = 0$ e quindi il payoff atteso per II , se gioca R , è: -3

Pertanto L è la best reply per I

- 2 (B, L)

($1, T; 1, B$) e ($2, L; 0, R$)

Calcoliamo la best reply per ciascuno dei due giocatori:

Se I gioca T ha un payoff atteso pari a $1/(h+k)$ di: $h \cdot (-2) + k \cdot 3$. In questo passo iterativo abbiamo: $h = 2, k = 0$ e quindi il payoff atteso per I , se gioca T , è: $1/(h+k) = 1/2$ di $2 \cdot (-2) = -4$

[osservazione: visto che in entrambi i casi dobbiamo moltiplicare per la *stessa* costante $1/(h+k)$, d'ora in poi eviteremo questa perdita di tempo che non ha alcuna conseguenza sulle scelte di I . Detto altrimenti, anziché calcolare il payoff atteso, calcoliamo il valore del payoff atteso moltiplicato per $h+k$. Ovviamente analogo discorso vale per II .]

Se I gioca B ha un payoff atteso pari a $1/(h+k)$ di: $h \cdot 3 + k \cdot (-4)$. In questo passo iterativo abbiamo: $h = 2, k = 0$ e quindi il payoff atteso per I (moltiplicato per $h+k$), se gioca B , è: $2 \cdot 3 = 6$

Pertanto B è la best reply per I

Passiamo a II

Se II gioca L ha un payoff atteso pari a $1/(m+n)$ di: $m \cdot 2 + n \cdot (-3)$. In questo passo iterativo abbiamo: $m = 1, n = 1$ e quindi il payoff atteso

per II (moltiplicato per $m+n$), se gioca L , è: $1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) = -1$
 Se II gioca R ha un payoff atteso pari a $1/(m+n)$ di: $m \cdot (-3) + n \cdot 4$. In questo passo iterativo abbiamo: $m = 1, n = 1$ e quindi il payoff atteso per II (moltiplicato per $m+n$), se gioca R , è: $1 \cdot (-3) + 1 \cdot 4 = 1$
 Pertanto R è la best reply per I

- 3 (B, R)

($1, T; 2, B$) e ($2, L; 1, R$)

Calcoliamo la best reply per ciascuno dei due giocatori:

Se I gioca T ha un payoff atteso (moltiplicato per $h+k$) pari a: $h \cdot (-2) + k \cdot 3$. In questo passo iterativo abbiamo: $h = 2, k = 1$ e quindi otteniamo: $2 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 = -1$

Se I gioca B ha un payoff atteso (moltiplicato per $h+k$) pari a: $h \cdot 3 + k \cdot (-4)$. In questo passo iterativo abbiamo: $h = 2, k = 1$ e quindi otteniamo: $2 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) = 2$

Pertanto B è la best reply per I

Passiamo a II

Se II gioca L ha un payoff atteso (moltiplicato per $m+n$) pari a: $m \cdot 2 + n \cdot (-3)$. In questo passo iterativo abbiamo: $m = 1, n = 2$ e quindi otteniamo: $1 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = -5$

Se II gioca R ha un payoff atteso (moltiplicato per $m+n$) pari a: $m \cdot (-3) + n \cdot 4$. In questo passo iterativo abbiamo: $m = 1, n = 2$ e quindi otteniamo: $1 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 = 5$

Pertanto R è la best reply per I

- 4 (B, R)

($1, T; 3, B$) e ($2, L; 2, R$)

Calcoliamo la best reply per ciascuno dei due giocatori:

Se I gioca T ha un payoff atteso (moltiplicato per $h+k$) pari a: $h \cdot (-2) + k \cdot 3$. In questo passo iterativo abbiamo: $h = 2, k = 2$ e quindi otteniamo: $2 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 = 2$

Se I gioca B ha un payoff atteso (moltiplicato per $h+k$) pari a: $h \cdot 3 + k \cdot (-4)$. In questo passo iterativo abbiamo: $h = 2, k = 2$ e quindi otteniamo: $2 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) = -2$

Pertanto T è la best reply per I

Passiamo a II

Se II gioca L ha un payoff atteso (moltiplicato per $m+n$) pari a: $m \cdot 2 + n \cdot (-3)$. In questo passo iterativo abbiamo: $m = 1, n = 3$ e

quindi otteniamo: $1 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) = -7$

Se II gioca R ha un payoff atteso (moltiplicato per $m + n$) pari a:
 $m \cdot (-3) + n \cdot 4$. In questo passo iterativo abbiamo: $m = 1, n = 3$ e
 quindi otteniamo: $1 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 = 9$

Pertanto R è la best reply per I

- 5 (T, R)

($2, T; 3, B$) e ($2, L; 3, R$)

Calcoliamo la best reply per ciascuno dei due giocatori:

Se I gioca T ha un payoff atteso (moltiplicato per $h + k$) pari a:
 $h \cdot (-2) + k \cdot 3$. In questo passo iterativo abbiamo: $h = 2, k = 3$ e
 quindi otteniamo: $2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 = 5$

Se I gioca B ha un payoff atteso (moltiplicato per $h + k$) pari a:
 $h \cdot 3 + k \cdot (-4)$. In questo passo iterativo abbiamo: $h = 2, k = 3$ e
 quindi otteniamo: $2 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) = -6$

Pertanto T è la best reply per I

Passiamo a II

Se II gioca L ha un payoff atteso (moltiplicato per $m + n$) pari a:
 $m \cdot 2 + n \cdot (-3)$. In questo passo iterativo abbiamo: $m = 2, n = 3$ e
 quindi otteniamo: $2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) = -5$

Se II gioca R ha un payoff atteso (moltiplicato per $m + n$) pari a:
 $m \cdot (-3) + n \cdot 4$. In questo passo iterativo abbiamo: $m = 2, n = 3$ e
 quindi otteniamo: $2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 = 6$

Pertanto R è la best reply per I

- 6 (T, R)

($3, T; 3, B$) e ($2, L; 4, R$)

Calcoliamo la best reply per ciascuno dei due giocatori:

Se I gioca T ha un payoff atteso (moltiplicato per $h + k$) pari a:
 $h \cdot (-2) + k \cdot 3$. In questo passo iterativo abbiamo: $h = 2, k = 4$ e
 quindi otteniamo: $2 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 = 8$

Se I gioca B ha un payoff atteso (moltiplicato per $h + k$) pari a:
 $h \cdot 3 + k \cdot (-4)$. In questo passo iterativo abbiamo: $h = 2, k = 4$ e
 quindi otteniamo: $2 \cdot 3 + 4 \cdot (-4) = -10$

Pertanto T è la best reply per I

Passiamo a II

Se II gioca L ha un payoff atteso (moltiplicato per $m + n$) pari a:
 $m \cdot 2 + n \cdot (-3)$. In questo passo iterativo abbiamo: $m = 3, n = 3$ e

quindi otteniamo: $3 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) = -3$

Se II gioca R ha un payoff atteso (moltiplicato per $m + n$) pari a:
 $m \cdot (-3) + n \cdot 4$. In questo passo iterativo abbiamo: $m = 3, n = 3$ e
 quindi otteniamo: $3 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 = 3$

Pertanto R è la best reply per I

- 7 (T, R)

($4, T; 3, B$) e ($2, L; 5, R$)

Calcoliamo la best reply per ciascuno dei due giocatori:

Se I gioca T ha un payoff atteso (moltiplicato per $h + k$) pari a:
 $h \cdot (-2) + k \cdot 3$. In questo passo iterativo abbiamo: $h = 2, k = 5$ e
 quindi otteniamo: $2 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 = 11$

Se I gioca B ha un payoff atteso (moltiplicato per $h + k$) pari a:
 $h \cdot 3 + k \cdot (-4)$. In questo passo iterativo abbiamo: $h = 2, k = 5$ e
 quindi otteniamo: $2 \cdot 3 + 5 \cdot (-4) = -14$

Pertanto T è la best reply per I

Passiamo a II

Se II gioca L ha un payoff atteso (moltiplicato per $m + n$) pari a:
 $m \cdot 2 + n \cdot (-3)$. In questo passo iterativo abbiamo: $m = 4, n = 3$ e
 quindi otteniamo: $4 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) = -1$

Se II gioca R ha un payoff atteso (moltiplicato per $m + n$) pari a:
 $m \cdot (-3) + n \cdot 4$. In questo passo iterativo abbiamo: $m = 4, n = 3$ e
 quindi otteniamo: $4 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 = 0$

Pertanto R è la best reply per I

- 8 (T, R)

($5, T; 3, B$) e ($2, L; 6, R$)

Calcoliamo la best reply per ciascuno dei due giocatori:

Se I gioca T ha un payoff atteso (moltiplicato per $h + k$) pari a:
 $h \cdot (-2) + k \cdot 3$. In questo passo iterativo abbiamo: $h = 2, k = 6$ e
 quindi otteniamo: $2 \cdot (-2) + 6 \cdot 3 = 14$

Se I gioca B ha un payoff atteso (moltiplicato per $h + k$) pari a:
 $h \cdot 3 + k \cdot (-4)$. In questo passo iterativo abbiamo: $h = 2, k = 6$ e
 quindi otteniamo: $2 \cdot 3 + 6 \cdot (-4) = -18$

Pertanto T è la best reply per I

Passiamo a II

Se II gioca L ha un payoff atteso (moltiplicato per $m + n$) pari a:
 $m \cdot 2 + n \cdot (-3)$. In questo passo iterativo abbiamo: $m = 5, n = 3$ e

quindi otteniamo: $5 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) = 1$

Se II gioca R ha un payoff atteso (moltiplicato per $m + n$) pari a:
 $m \cdot (-3) + n \cdot 4$. In questo passo iterativo abbiamo: $m = 5, n = 3$ e
 quindi otteniamo: $5 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 = -3$

Pertanto L è la best reply per I

- 9 (T, L)

($6, T; 3, B$) e ($3, L; 6, R$)

Calcoliamo la best reply per ciascuno dei due giocatori:

Se I gioca T ha un payoff atteso (moltiplicato per $h + k$) pari a:
 $h \cdot (-2) + k \cdot 3$. In questo passo iterativo abbiamo: $h = 3, k = 6$ e
 quindi otteniamo: $3 \cdot (-2) + 6 \cdot 3 = 12$

Se I gioca B ha un payoff atteso (moltiplicato per $h + k$) pari a:
 $h \cdot 3 + k \cdot (-4)$. In questo passo iterativo abbiamo: $h = 3, k = 6$ e
 quindi otteniamo: $3 \cdot 3 + 6 \cdot (-4) = -15$

Pertanto T è la best reply per I

Passiamo a II

Se II gioca L ha un payoff atteso (moltiplicato per $m + n$) pari a:
 $m \cdot 2 + n \cdot (-3)$. In questo passo iterativo abbiamo: $m = 6, n = 3$ e
 quindi otteniamo: $6 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) = 3$

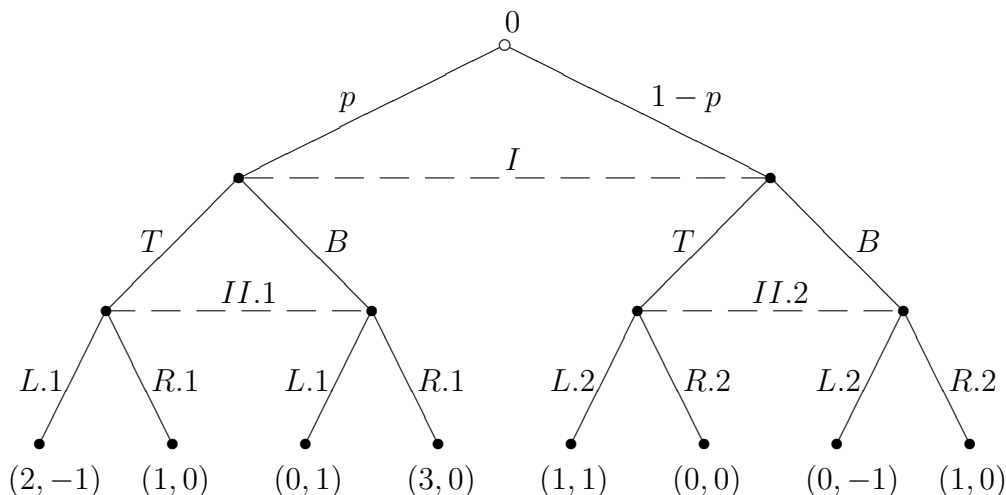
Se II gioca R ha un payoff atteso (moltiplicato per $m + n$) pari a:
 $m \cdot (-3) + n \cdot 4$. In questo passo iterativo abbiamo: $m = 6, n = 3$ e
 quindi otteniamo: $6 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 = -6$

Pertanto L è la best reply per I

- etc.

Esercizio 2 Soluzione

Hint parziale. Se usiamo la trasformazione di Harsanyi otteniamo questo gioco in forma estesa:



Esercizio 3 Soluzione

Unico commento: venendo meno la condizione di superadditività, diventa (ancor più) discutibile limitare la ricerca delle soluzioni fra le imputazioni.

Nel gioco dato, ad esempio, assegnare 1 a entrambi i giocatori sembra essere un’ottima idea, difficilmente contestata dai giocatori stessi. Anche se la soluzione proposta non appartiene al nucleo (in base alla definizione standard) e non è neanche una imputazione.

Esercizio 4 Soluzione

Le condizioni di superadditività per un gioco a tre giocatori sono le seguenti ($i, j \in \{1, 2, 3\}$):

$$\begin{cases} v(i) + v(j) \leq v(ij) \\ v(i) + v(ij) \leq v(123) \\ v(1) + v(2) + v(3) \leq v(123) \end{cases}$$

Nel nostro caso, diventano:

$$\begin{cases} 2f(1) \leq f(2) \\ f(1) + f(2) \leq f(3) \\ 3f(1) \leq f(3) \end{cases}$$

Si vede che l’ultima disuguaglianza è conseguenza delle prime due. Che sono quindi le condizioni cui f deve soddisfare per garantire la superadditività.

Lo studio del nucleo è lasciato al lettore.

Esercizio 5 Soluzione

No soluzione.

Esercizio 6 Soluzione

No soluzione.

Esercizio 7 Soluzione

No soluzione.

Esercizio 8 Soluzione

La risposta è ovviamente sì: per ogni $S, T \subseteq N$, con $S \cap T = \emptyset$, si ha:

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$$

$$w(S \cup T) \geq w(S) + w(T)$$

Basta allora sommare membro a membro.

Occorrerà anche notare che serve che i giochi siano definiti sullo stesso insieme N di giocatori affinché abbia senso considerare la loro somma.

Esercizio 9 Soluzione

No soluzione.

Esercizio 10 Soluzione

L'idea per costruire un esempio di gioco bilanciato che non sia totalmente bilanciato è semplice. Si prende un gioco (ad esempio, il gioco di maggioranza a tre giocatori) che non sia bilanciato. Poi si assegna a $v(N)$ (nel nostro esempio, potremmo prendere $N = \{1, 2, 3, 4\}$) un valore molto alto (in modo da poter soddisfare le brame delle coalizioni intermedia; nel nostro caso, possiamo definire $v(\{1, 2, 3, 4\}) = 10$, per esempio).

Quanto alla convessità, che un gioco convesso abbia nucleo non vuoto è un risultato classico in TdG. Si verifica facilmente (semplicemente usando la definizione di convessità) che per qualsivoglia permutazione dei giocatori il vettore dei contributi marginali così ottenuto sta nel nucleo. Ad esempio, sta nel nucleo $(v(1), v(12) - v(1), v(123) - v(12), \dots, v(1, 2, \dots, n) - v(1, 2, \dots, n-1))$. Provare, per credere, a dimostrare che $v(2, 4, 7) \leq [v(12) - v(1)] + [v(1, 2, 3, 4) - v(1, 2, 3)] + [v(1, 2, \dots, 7) - v(1, 2, \dots, 6)]$.

Assodato che un gioco convesso è bilanciato, basta osservare che ogni sottogioco di un gioco convesso è ancora convesso per dedurre che un gioco convesso è totalmente bilanciato.

Esercizio 11 Soluzione

Ricordo che un TU-game si dice additivo se $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$ per ogni coppia di coalizioni disgiunte. Se un gioco è additivo, per applicazione ripetuta della condizione sopra riportata, si ha che $v(S) = \sum_{i \in S} v(i)$.

E' immediato verificare che, se un gioco è additivo, allora il valore Shapley coincide con $v(i)$ per ogni giocatore i . Ciò è conseguenza immediata del fatto che, in un gioco additivo, ogni giocatore è "dummy".

Il viceversa non è vero, nel senso che esistono giochi non additivi per cui il valore Shapley vale $v(i)$ per ogni i . Basta considerare v così definito: $v(\emptyset) = v(i) = v(123) = 0$ e $v(ij) = 1$.

Si noti che questo gioco non è superadditivo. In effetti, per i giochi superadditivi, dal fatto che $\Phi_i(v) = v(i)$ per ogni i segue che il gioco è additivo. La dimostrazione di questo fatto è semplice: intanto osserviamo che la condizione $\Phi_i(v) = v(i)$ per ogni i implica che $v(N) = \sum_{i \in N} v(i)$. Se il gioco non fosse additivo, vi sarebbe una coalizione T per la quale non è vero che $v(T) = \sum_{i \in T} v(i)$. Per la superadditività deve essere $v(T) \geq \sum_{i \in T} v(i)$, quindi se non vale l'uguale può essere vero solo $v(T) > \sum_{i \in T} v(i)$. Ma allora $v(N) \geq v(T) + \sum_{i \in N \setminus T} v(i) > \sum_{i \in T} v(i) + \sum_{i \in N \setminus T} v(i) = v(N)$, il che è impossibile (la prima disuguaglianza segue dalla superadditività).

Lascio a chi ne abbia voglia esaminare a fondo la questione al di fuori dei giochi superadditivi (intendo dire, individuare la classe dei giochi per cui $\Phi_i(v) = v(i)$ per ogni giocatore i).

Esercizio 12 Soluzione

Si noti che i giochi indicati *non* sono superadditivi, tranne che nel caso in cui $S = N$. Visto che il caso $S = N$ è un po' speciale (ma anche facile da trattare), d'ora in avanti supporrò che sia $S \neq N$.

La condizione di anonimità (basta la simmetria) ci dice che esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\phi_i(v^S) = \begin{cases} \alpha & \text{se } i \in S \\ \beta & \text{se } i \notin S \end{cases}$$

La condizione di "efficienza" ci dice che $\alpha s + \beta(n - s) = 0$ ($v(N) = 0$, visto che abbiamo deciso di non occuparci del caso $S = N$).

Si noti, infine, che non esistono null players. Se $i \in S$, allora $v(S) - v(S \setminus \{i\}) = 1$. Se $i \notin S$, $v(S \cup \{i\}) - v(S) = 1$.

Domanda ulteriore: esistono dummy players?

Esercizio 13 Soluzione

No soluzione.

Esercizio 14 Soluzione

Un gioco è superadditivo se: per ogni $S, T \subseteq N$, $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ se l'intersezione tra S e T è vuota.

Ora, nulla vieta che possa essere $v(S) = v(T) = 1$. Basta considerare un gioco a tre giocatori, assegnare come peso 1 a ciascun giocatore e mettere come quota 0.9. Se prendiamo $S = \{1\}$ e $T = \{2\}$, ovviamente $v(S) + v(T) = 2$ e quindi non può essere $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$, visto che $v(S \cup T)$ può valere al massimo 1.

Sembra esserci una “magagna”. In effetti, la definizione di gioco di maggioranza pesato non esclude che possano esserci due coalizioni tra loro disgiunte ed entrambe vincenti! Come nel nostro esempietto appena visto. Vale la pena, allora, provare ad aggiungere qualche restrizione ragionevole tale da impedire che vi siano “due maggioranze” contemporaneamente.

Esercizio 15 Soluzione

Possiamo utilizzare la formula che dà il valore Shapley (s è il numero di elementi di S ed n è il numero totale dei giocatori):

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} [v(S) - v(S \setminus \{i\})]$$

Nel caso di un gioco “semplice”, la formula si semplifica e diventa:

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \text{ vince, } S \setminus \{i\} \text{ perde}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \quad (3)$$

Vediamo cosa avviene se abbiamo un gioco di maggioranza semplice, con un numero di giocatori n dispari (il caso n pari si tratta in modo simile), ciascuno dei quali abbia un voto. Abbiamo allora $n = 2m + 1$ per un opportuno numero naturale m e la maggioranza è $m + 1$. Quindi, ogni coalizione S con almeno $m + 1$ elementi è vincente. Sono interessanti quelle con esattamente $m + 1$ elementi perché quelle sono vincenti, ma se se ne va via un giocatore diventano perdenti.

Per calcolare il valore Shapley non abbiamo bisogno di alcuna formula, in quanto per simmetria esso sarà pari ad $1/n$ per ogni giocatore. Tuttavia, userò la formula per “allenamento” per risolvere poi l’esercizio assegnato. Se vogliamo trovare il valore Shapley, ad esempio, per il giocatore 1, la formula ci chiede di scoprire quante sono le coalizioni che:

- sono vincenti
- contengono 1
- sono perdenti se 1 “va via” (detto più correttamente: $S \setminus \{1\}$ è perdente)

Si vede facilmente che queste sono esattamente le coalizioni che contengono 1 ed altri m elementi dell'insieme $\{2, 3, \dots, n\} = \{2, 3, \dots, 2m + 1\}$. Vale a dire, sono tante quante i sottoinsiemi che contengono m elementi di un insieme di $2m$ elementi.

Ricordo che in generale il numero di sottoinsiemi contenenti k elementi di un insieme di n elementi è dato da $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Quindi, le coalizioni che ci interessano sono $\binom{2m}{m} = \frac{2m!}{m!m!}$. Pertanto, usando la formula (3), con $s = m + 1$ e $n = 2m + 1$:

$$\Phi_i(v) = \frac{2m!}{m!m!} \frac{(m+1-1)!(2m+1-(m+1))!}{(2m+1)!} = \frac{2m!}{m!m!} \frac{m!m!}{(2m+1)!}$$

Si noti che nel caso che stiamo trattando tutti gli addendi di (3) sono uguali, per cui ci è bastato moltiplicare $\frac{m!m!}{(2m+1)!}$ per il numero degli addendi che è pari a $\frac{2m!}{m!m!}$.

Naturalmente, nella formula che abbiamo trovato si semplifica quasi tutto e otteniamo $\frac{1}{2m+1} = \frac{1}{n}$.

Passiamo ora al caso di 10 azioni. Abbiamo 9 giocatori, 8 con una azione ciascuno e uno con 2 azioni (supponiamo che costui sia il giocatore 9).

Calcoliamo il valore Shapley per il giocatore 1 (che sarà uguale, per simmetria, a quello di tutti i primi 8 giocatori). Quando il giocatore 1 è essenziale in una coalizione S ? In due casi:

A)- S è una coalizione con 6 giocatori dell'insieme $\{1, \dots, 8\}$ ed S contiene 1, quindi queste coalizioni sono tante quante le coalizioni di 5 giocatori presi dall'insieme $\{2, \dots, 8\}$.

B)- S è una coalizione con 5 giocatori tra cui il giocatore 9. Queste coalizioni sono tante quante le coalizioni di 4 giocatori dell'insieme $\{1, \dots, 8\}$ contenenti 1, quindi queste coalizioni sono tante quante le coalizioni di 3 giocatori presi dall'insieme $\{2, \dots, 8\}$.

Il numero di tali coalizioni è:

$$\text{A)- } \binom{7}{5} = \frac{7!}{2!5!}$$

$$\text{B)- } \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!}$$

Allora il valore Shapley è dato da (il primo addendo riguarda il caso A) ed il secondo il caso B)):

$$\frac{7!}{2!5!} \frac{(6-1)!(9-6)!}{9!} + \frac{7!}{3!4!} \frac{(5-1)!(9-5)!}{9!} = \frac{7!}{2!5!} \frac{5!3!}{9!} + \frac{7!}{3!4!} \frac{4!4!}{9!} = \frac{1}{24} + \frac{1}{18} = \frac{7}{72}$$

Ovviamente potremmo usare il fatto che il valore Shapley è una pre-imputazione per trovare il valore per il giocatore 9. Ma vediamo anche qui l'uso della formula.

Quando il giocatore 9 è essenziale in una coalizione S ? In due casi:

C)- S è una coalizione con 7 azioni, precisamente con 6 giocatori tra cui il giocatore 9, quindi queste coalizioni sono tante quante le coalizioni di 5 giocatori presi dall'insieme $\{1, \dots, 8\}$.

D)- S è una coalizione con 6 azioni, precisamente con 5 giocatori tra cui il giocatore 9. Queste coalizioni sono tante quante le coalizioni di 4 giocatori dell'insieme $\{1, \dots, 8\}$.

Il numero di tali coalizioni è:

$$\text{C)- } \binom{8}{5} = \frac{8!}{3!5!}$$

$$\text{D)- } \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!4!}$$

Allora il valore Shapley è dato da (il primo addendo riguarda il caso C) ed il secondo il caso D)):

$$\frac{8!}{3!5!} \frac{(6-1)!(9-6)!}{9!} + \frac{8!}{4!4!} \frac{(5-1)!(9-5)!}{9!} = \frac{8!}{3!5!} \frac{5!3!}{9!} + \frac{8!}{4!4!} \frac{4!4!}{9!} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

Si può verificare, come segnale che forse non si sono sbagliati i conti, che la somma dei valori Shapley fa proprio $v(N)$, cioè 1:

$$\frac{7}{72} \cdot 8 + \frac{2}{9} = \frac{56 + 16}{72} = 1$$

Il caso di 100 e 1000 azioni si tratta in modo perfettamente analogo. Vediamo cosa otteniamo come valore Shapley, nel caso di 100 azioni, per il possessore di 20 azioni.

Le coalizioni interessanti sono quelle con:

- 31 giocatori possessori di una azione, più lui
- 32 giocatori possessori di una azione, più lui
- ...
- 50 giocatori possessori di una azione, più lui

Sono tutte coalizioni che sono vincenti e diventano perdenti se lui se ne va via. Le formulette stavolta diventano (si noti che il numero totale di giocatori è 81):

$$\begin{aligned} & \binom{80}{31} \frac{(32-1)!(81-32)!}{81!} + \dots + \binom{80}{50} \frac{(51-1)!(81-51)!}{81!} = \\ & = \frac{(80)!(80-31)!}{31!} \frac{(31)!(81-32)!}{81!} + \dots + \frac{(80)!(80-50)!}{50!} \frac{(50)!(81-51)!}{81!} = \\ & = \frac{1}{81} + \dots + \frac{1}{81} = \frac{20}{81} \end{aligned}$$

Analogamente, per il caso di 1000 azioni, si otterrà: $\frac{200}{801}$.

Il valore Shapley per i “piccoli azionisti” lo si può ricavare usando il fatto che il valore Shapley è una pre-imputazione (quindi sarà, nel caso di 100 azioni: $\frac{1}{80}(1 - \frac{20}{81}) = \frac{1}{80} \frac{61}{81} = \frac{61}{80 \cdot 81}$ che vale circa 0,0094, mentre il valore Shapley per il “grande azionista” vale circa 0,2469; per 1000 azioni otteniamo: circa 0,000938 per i “piccoli” e 0,2497 per il “grande”).

Ciò che emerge di interessante (anche tenendo conto della interpretazione del valore Shapley, nel contesto dei giochi semplici, come “indice di potere”) è che il valore Shapley assegna al grande azionista un valore che è pari a circa $1/4$, nonostante egli possieda solo $1/5$ delle azioni.

NOTA: i calcoli precedenti possono essere semplificati moltissimo, utilizzando considerazioni come le seguenti (usate da Matteo Dell’Amico per risolvere l’esercizio). Vediamo il caso di 10 azioni (gli altri casi sono perfettamente analoghi). Se scrivessimo una matrice contenente nelle colonne i contributi marginali dei giocatori al variare delle possibili permutazioni, avremmo una matrice fatta di tutti zeri, eccetto i casi in cui un giocatore fa “scattare” da perdente a vincente una coalizione (sono i cosiddetti “swing”). Basta allora cercare di capire quante volte il “grande” azionista provoca uno “swing”: ebbene, ciò avviene per tutte e sole le permutazioni nelle quali egli si trova in quinta o sesta posizione. Visto che queste sono $2/9$ di tutte le permutazioni, il suo valore Shapley sarà appunto $2/9$.

Esercizio 16 Soluzione

Alla situazione data possiamo associare un TU-game definito nel modo seguente: $v(\emptyset) = v(i) = 0$, $v(12) = a$, $v(13) = b$, $v(23) = 0$, $v(123) = b$.

Le imputazioni sono date dall’insieme delle $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tali che $x_1 + x_2 + x_3 = b$. Il nucleo è dato da quelle imputazioni che soddisfano altresì le condizioni:

$$x_1 + x_2 \geq v(\{1, 2\}) = a$$

$$x_1 + x_3 \geq v(\{1, 3\}) = b$$

$$x_2 + x_3 \geq v(\{2, 3\}) = 0$$

La seconda condizione ci dice che al giocatore 2 (quello che valuta a la casa, cioè quello che la valuta meno) non toccherà niente. E pertanto b viene spartito tra 1 e 3 (ma 3 non può avere più di $b - a$: ovvio! Sennò ad 1 conviene vendere la casa a 2). Più precisamente, il nucleo è dato da:

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 = 0, \quad 0 \leq x_3 \leq b - a, \quad x_1 = b - x_3\}$$

Per quanto riguarda il valore Shapley, lo possiamo calcolare usando la stessa tabella già usata per la soluzione del primo esercizio:

permutazione	1	2	3
123	0	a	$b - a$
132	0	0	b
213	a	0	$b - a$
231	b	0	0
312	b	0	0
321	b	0	0
totale	$3b + a$	a	$3b - 2a$
valore Shapley	$b/2 + a/6$	$a/6$	$b/2 - a/3$
valore Shapley	$\frac{1}{2}(b - a) + \frac{4}{6}a$	$\frac{1}{6}a$	$\frac{1}{2}(b - a) + \frac{1}{6}a$

Ho scritto in due forme diverse il valore Shapley (i valori sono gli stessi!), perché il secondo modo mette in maggior evidenza come venga spartito fra i giocatori il surplus che possono ottenere dalla contrattazione.

Si noti come il valore Shapley assegni qualcosa anche al giocatore 2. Si direbbe che il suo ruolo sia quello di erodere un poco del potere contrattuale di 1, appropriandosi alla pari con 3 di questa parte di potere contrattuale perduto. Se volessimo “prendere sul serio” la storiella dei giocatori che entrano uno ad uno nella stanza, potremmo vedere questo come connesso al fatto che c’è una chance che un contratto (temporaneo) venga concluso fra 1 e 2: vedasi la prima riga della tabella.

Caso particolare è $b = a$. In questo caso, il nucleo si riduce ad un’unica imputazione, che assegna interamente al giocatore 1 i guadagni derivanti dalla cooperazione (si può “leggere” questo risultato come un effetto della concorrenza che vi è tra i giocatori 2 e 3: sul lato domanda c’è appunto concorrenza, mentre sul lato offerta no).

Per $b = a$ il valore Shapley (lo si legge bene dall’ultima riga della tabella) assegna $4/6$ del guadagno ad 1 mentre 2 e 3 si spartiscono quel che resta. Anche qui, il giocatore 1 rimane privilegiato, ma in modo meno “estremistico” di come prefigura invece il nucleo.

Vediamo una rappresentazione grafica del nucleo. Nella figura 1, il triangolo disegnato rappresenta l’insieme delle imputazioni.

Sono rappresentate nel disegno le tre disuguaglianze relative alle coalizioni di due giocatori. Viene messo in evidenza, nel disegno, il fatto che per una imputazione le disuguaglianze seguenti:

$$x_1 + x_2 \geq v(\{1, 2\}) = a$$

$$x_1 + x_3 \geq v(\{1, 3\}) = b$$

$$x_2 + x_3 \geq v(\{2, 3\}) = 0$$

sono equivalenti alle seguenti (semplicemente, si sfrutta il fatto che $x_1 + x_2 + x_3 = b$):

$$x_3 \leq b - a$$

$$x_2 \leq 0$$

$$x_1 \leq b$$

Il nucleo è la porzione calcata di uno dei lati.

In figura 1 è indicato anche il valore Shapley, che non sta dentro al nucleo.

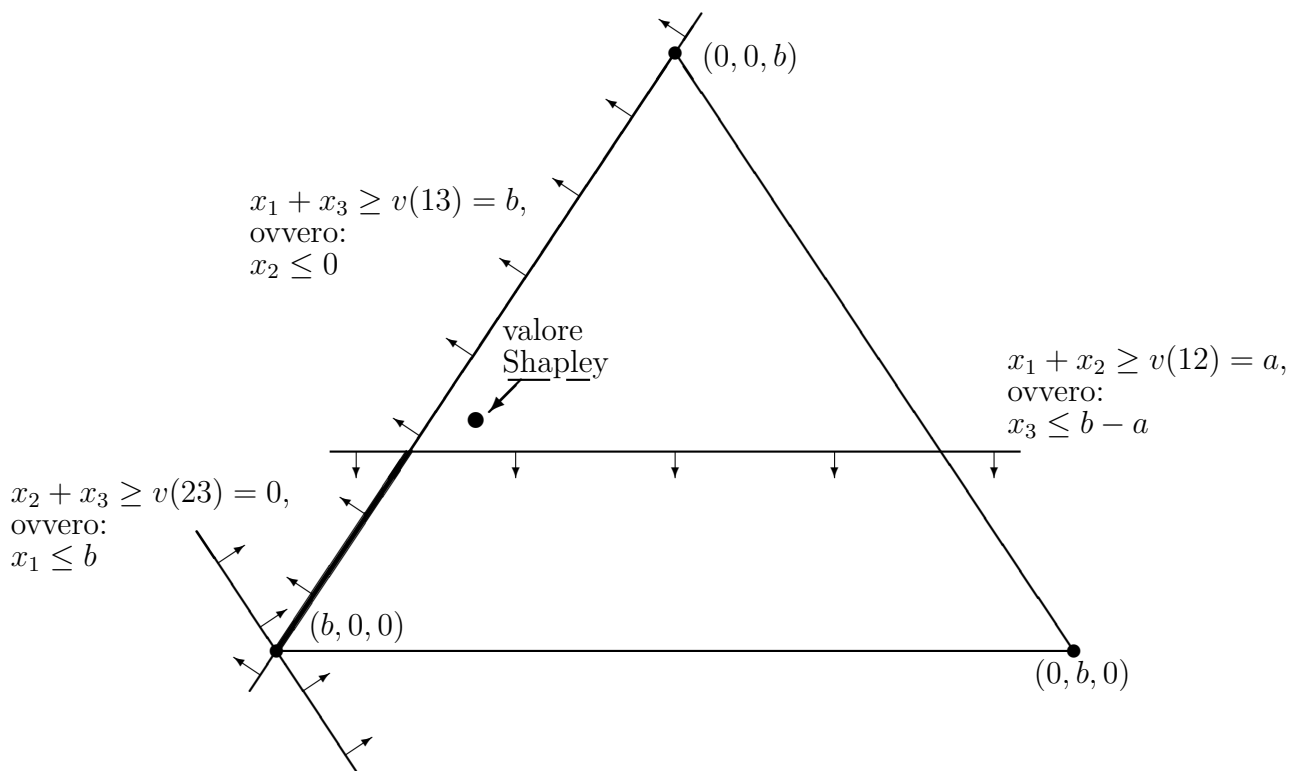


Figura 1: Il nucleo e il valore Shapley del gioco della vendita della casa.

Esercizio 17 Soluzione

Costruiamo la tabella seguente, dove nella prima colonna mettiamo le varie permutazioni possibili dei tre giocatori, mentre nella colonna intestata con i

mettiamo i guadagni marginali attribuiti al giocatore i nelle varie permutazioni possibili. Le due ultime righe contengono le somme dei guadagni marginali e poi tali valori divisi per 6 (ovverossia 3!), vale a dire il valore Shapley.

permutazione	1	2	3
123	0	9	3
132	0	6	6
213	9	0	3
231	7	0	5
312	5	6	1
321	7	4	1
totale	28	25	19
valore Shapley	28/6	25/6	19/6

Si può osservare che $\phi_1(v) + \phi_2(v) = 28/6 + 25/6 = 53/6 < 54/6 = 9 = v(\{1, 2\})$ e quindi il valore Shapley non sta nel nucleo.

Come nota aggiuntiva rispetto a quello chiesto dall'esercizio, si può notare che il valore Shapley è una imputazione (cioè soddisfa le condizioni di razionalità individuale): d'altro canto, si può agevolmente verificare come il gioco dato sia superadditivo, fatto che garantisce in generale che il valore Shapley sia una imputazione. Infine, il nucleo non è vuoto: l'allocazione $(29/6, 25/6, 18/6)$ è fattibile e soddisfa tutte le condizioni di razionalità. Il gioco dato è quindi un esempio di TU-game per il quale il valore Shapley non appartiene al nucleo, pur essendo quest'ultimo non vuoto.

Esercizio 18 Soluzione

La verifica che ogni giocatore è un "dummy player" è banale, anche se noiosa (per ogni giocatore i , e per ogni coalizione S che non contenga i , abbiamo $w(S \cup \{i\}) = w(S) + w(\{i\})$).

Ne segue che $\phi_i(w) = w(i)$. E quindi $\phi_1(w) = 2, \phi_2(w) = 3, \phi_3(w) = 1$.

La proprietà di additività del valore Shapley ci permette di trovare immediatamente il valore Shapley per $v + w$ ed è:

$$\phi_1(v + w) = 2 + 28/6, \quad \phi_2(v + w) = 3 + 25/6, \quad \phi_3(v + w) = 1 + 19/6$$