Esercizi TdG nuovi, 2008

Esercizio 1 Si consideri il gioco seguente:

$I \backslash II$	L	C	R
T	6 5	3 9	1 6
M	8 4	9 0	2 6
B	8 3	5 4	1 6

Se il gioco fosse ad informazione perfetta con il giocatore II in vantaggio della prima mossa[1], quale sarebbe l'equilibrio perfetto nei sottogiochi?

Esercizio 1 Soluzione

Si può usare la solita procedura di ricerca della "best reply", solo che ci si limita a cercare la miglior risposta di I alle varie scelte di II, come nella matrice sotto (vedasi i numeri sopralineati):

$I \backslash II$	L	C	R
T	6 5	3 9	1 6
M	$\bar{8}$ 4	$\bar{9}$ 0	$\bar{2}$ 6
B	$\bar{8}$ 3	5 4	1 6

Contrariamente a quello che si fa nella ricerca di equilibri di Nash quando le mosse siano contemporanee (detto altrimenti, quando si usa l'interpretazione standard di un gioco in forma strategica), non ci interessa la "miglior risposta" di II, ma semplicemente il giocatore II sceglierà, fa le alternative disponibili, quella che gli garantisce il miglio payoff. Nel nostro caso, sceglierà evidentemente R. Con conseguente payoff pari a 2 per I e a 6 per II. Risultato non efficiente, ma questo non è certo una novità.

[1] Questo è il testo di un esercizio che mi è stato sottoposto per avere indicazioni sulla sua "soluzione". Io non avrei parlato di "vantaggio della prima mossa", in quanto non è per nulla scontato che vi sia un tale vantaggio. Per alcune considerazioni elementari in proposito, rinvio a: *Prego, dopo di lei!*, Lettera matematica Pristem, **55**, 21-23, 2005. L'articolo citato è disponibile in rete:
`http://www.diptem.unige.it/patrone/LMP_55_patrone.pdf`.

Come si può verificare agevolmente (vedasi la tabella seguente a sinistra, dove è indicata anche la miglior risposta per II), la coppia di strategie che abbiamo individuato è anche un equilibrio di Nash. Ciò non è necessariamente sempre vero. Basta modificare un poco il gioco per ottenerne uno in cui questo fatto non si verifica (vedi tabella seguente a destra). Anche senza presentare comunque alcun esempio esplicito, per convincersi di questo si può anche osservare che un gioco finito non necessariamente ha un equilibrio di Nash, mentre la procedura sopra descritta (che corrisponde a una ottimizzazione a due livelli) ha sempre una soluzione, in un gioco finito[2].

$I \backslash II$	L	C	R
T	6 5	3 $\bar{9}$	1 6
M	$\bar{8}$ 4	$\bar{9}$ 0	$\bar{2}$ $\bar{6}$
B	$\bar{8}$ 3	5 4	1 $\bar{6}$

$I \backslash II$	L	C	R
T	6 5	$\bar{9}$ 0	1 $\bar{6}$
M	$\bar{8}$ 4	3 $\bar{9}$	$\bar{2}$ 6
B	$\bar{8}$ 3	5 4	1 $\bar{6}$

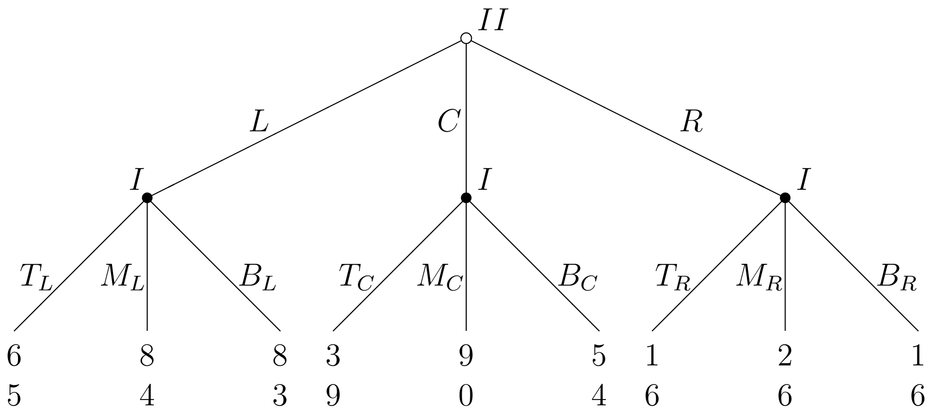
Notare che questo gioco non presenta dilemmi per II, in quanto i payoff che ottiene, scegliendo II (e tenendo conto della miglior risposta di I), sono comunque peggiori di quello che ha scegliendo R. Se il gioco fosse stato il seguente:

$I \backslash II$	L	C	R
T	6 5	3 9	1 6
M	$\bar{8}$ 5	$\bar{9}$ 0	$\bar{2}$ 6
B	$\bar{8}$ 7	5 4	1 6

Il giocatore II non è in grado di prevedere quale possa essere la scelta di I, visto che per lui M e B sono indifferenti. E, se I scegliesse M, per II sarebbe meglio l'opzione R, mentre se I scegliesse B, la scelta migliore per II sarebbe invece L.

Del gioco dato possiamo dare anche una rappresentazione in forma estesa (dalla quale emerge chiaramente quanto già si doveva sapere: che le strategie a disposizione di I sono $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$).

[2]Come è possibile? Un gioco finito, in forma estesa e ad informazione perfetta, ha sempre uno SPE (equilibrio perfetto nei sottogiochi). E uno SPE è sempre anche un equilibrio di Nash! Dove sta l'inghippo?



La tabella seguente a sinistra è la rappresentazione in forma strategica del gioco sopra descritto in forma estesa. La tabella a destra è la stessa, con aggiunte le miglior risposte dei due giocatori (individuabili mediante i numeri che sono stati soprasegnati). Dalla tabella di destra si vede come il gioco abbia 6 equilibri di Nash: $(T_L\, M_C\, M_R, R)$, $(M_L\, M_C\, M_R, R)$, $(B_L\, M_C\, M_R, R)$, $(M_L\, M_C\, M_R, R)$, $(M_L\, B_C\, M_R, R)$ e $(B_L\, B_C\, M_R, R)$. Di questi, solo due sono equilibri perfetti nei sottogiochi: $(M_L\, M_C\, M_R, R)$ e $(B_L\, M_C\, M_R, R)$, come può essere agevolmente verificato usando l'induzione a ritroso.

Si noti che i due equilibri perfetti nei sottogiochi sono "leggibili" nella tabella originaria, visto che abbiamo a disposizione le "best reply" pe I. Infatti, le scelte ottimali di I nei suoi tre nodi sono: M_L o B_L, M_L, M_R (non a caso in corrispondenza con i payoff di I che abbiamo soprasegnato). Da qui l'individuazione di due strategie[3]: $M_L\, M_L\, M_R$ e $B_L\, M_L\, M_R$. Che, assemblate con la scelta ottimale di II, che è R, ci danno per l'appunto i due SPE. La stessa identica cosa può essere fatta col gioco "modificato", rappresentato nella tabella a destra di pagina 2.

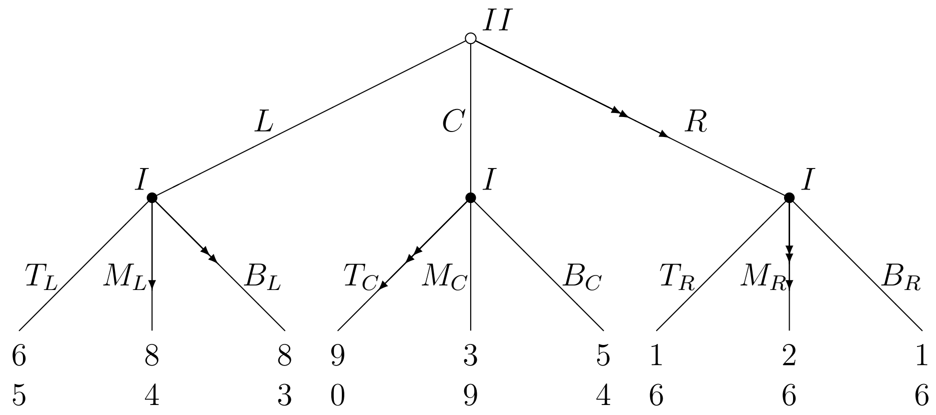
Per i sei equilibri di Nash non è difficile comprendere come emergano. Tutti (ovviamente!) prevedono per I la scelta ottimale sul "sentiero di equilibrio" (ovvero, nel nodo di destra). Negli alti due nodi di I, la sua scelta è arbitraria in quanto il suo payoff non è toccato da quello che fa in nodi in cui non viene chiamato a giocare, con l'eccezione di una condizione: R deve continuare a rimanere miglior risposta per I (cosa che non avviene se I sceglie T_C: ecco "perché" non sono equilibri di Nash $(T_L\, T_C\, M_R, R)$, $(M_L\, T_C\, M_R, R)$ e $(B_L\, T_C\, M_R, R)$, mente lo sono gli altri sei).

[3]Per il gioco in forma estesa, ovvero per la sua rappresentazione in forma strategica nella tabella seguente, a sinistra.

$I \backslash II$	L	C	R
$T_L\ T_C\ T_R$	6 5	3 9	1 6
$M_L\ T_C\ T_R$	8 4	3 9	1 6
$B_L\ T_C\ T_R$	8 3	3 9	1 6
$T_L\ M_C\ T_R$	6 5	9 0	1 6
$M_L\ M_C\ T_R$	8 4	9 0	1 6
$B_L\ M_C\ T_R$	8 3	9 0	1 6
$T_L\ B_C\ T_R$	6 5	5 4	1 6
$M_L\ B_C\ T_R$	8 4	5 4	1 6
$B_L\ B_C\ T_R$	8 3	5 4	1 6
$T_L\ T_C\ M_R$	6 5	3 9	2 6
$M_L\ T_C\ M_R$	8 4	3 9	2 6
$B_L\ T_C\ M_R$	8 3	3 9	2 6
$T_L\ M_C\ M_R$	6 5	9 0	2 6
$M_L\ M_C\ M_R$	8 4	9 0	2 6
$B_L\ M_C\ M_R$	8 3	9 0	2 6
$T_L\ B_C\ M_R$	6 5	5 4	2 6
$M_L\ B_C\ M_R$	8 4	5 4	2 6
$B_L\ B_C\ M_R$	8 3	5 4	2 6
$T_L\ T_C\ B_R$	6 5	3 9	1 6
$M_L\ T_C\ B_R$	8 4	3 9	1 6
$B_L\ T_C\ B_R$	8 3	3 9	1 6
$T_L\ M_C\ B_R$	6 5	9 0	1 6
$M_L\ M_C\ B_R$	8 4	9 0	1 6
$B_L\ M_C\ B_R$	8 3	9 0	1 6
$T_L\ B_C\ B_R$	6 5	5 4	1 6
$M_L\ B_C\ B_R$	8 4	5 4	1 6
$B_L\ B_C\ B_R$	8 3	5 4	1 6

$I \backslash II$	L	C	R
$T_L\ T_C\ T_R$	6 5	3 $\bar{9}$	1 6
$M_L\ T_C\ T_R$	$\bar{8}$ 4	3 $\bar{9}$	1 6
$B_L\ T_C\ T_R$	$\bar{8}$ 3	3 $\bar{9}$	1 6
$T_L\ M_C\ T_R$	6 5	$\bar{9}$ 0	1 $\bar{6}$
$M_L\ M_C\ T_R$	$\bar{8}$ 4	$\bar{9}$ 0	1 $\bar{6}$
$B_L\ M_C\ T_R$	$\bar{8}$ 3	$\bar{9}$ 0	1 $\bar{6}$
$T_L\ B_C\ T_R$	6 5	5 4	1 $\bar{6}$
$M_L\ B_C\ T_R$	$\bar{8}$ 4	5 4	1 $\bar{6}$
$B_L\ B_C\ T_R$	$\bar{8}$ 3	5 4	1 $\bar{6}$
$T_L\ T_C\ M_R$	6 5	3 $\bar{9}$	$\bar{2}$ 6
$M_L\ T_C\ M_R$	$\bar{8}$ 4	3 $\bar{9}$	$\bar{2}$ 6
$B_L\ T_C\ M_R$	$\bar{8}$ 3	3 $\bar{9}$	$\bar{2}$ 6
$T_L\ M_C\ M_R$	6 5	$\bar{9}$ 0	$\bar{2}$ $\bar{6}$
$M_L\ M_C\ M_R$	$\bar{8}$ 4	$\bar{9}$ 0	$\bar{2}$ $\bar{6}$
$B_L\ M_C\ M_R$	$\bar{8}$ 3	$\bar{9}$ 0	$\bar{2}$ $\bar{6}$
$T_L\ B_C\ M_R$	6 5	5 4	$\bar{2}$ $\bar{6}$
$M_L\ B_C\ M_R$	$\bar{8}$ 4	5 4	$\bar{2}$ $\bar{6}$
$B_L\ B_C\ M_R$	$\bar{8}$ 3	5 4	$\bar{2}$ $\bar{6}$
$T_L\ T_C\ B_R$	6 5	3 $\bar{9}$	1 6
$M_L\ T_C\ B_R$	$\bar{8}$ 4	3 $\bar{9}$	1 6
$B_L\ T_C\ B_R$	$\bar{8}$ 3	3 $\bar{9}$	1 6
$T_L\ M_C\ B_R$	6 5	$\bar{9}$ 0	1 $\bar{6}$
$M_L\ M_C\ B_R$	$\bar{8}$ 4	$\bar{9}$ 0	1 $\bar{6}$
$B_L\ M_C\ B_R$	$\bar{8}$ 3	$\bar{9}$ 0	1 $\bar{6}$
$T_L\ B_C\ B_R$	6 5	5 4	1 $\bar{6}$
$M_L\ B_C\ B_R$	$\bar{8}$ 4	5 4	1 $\bar{6}$
$B_L\ B_C\ B_R$	$\bar{8}$ 3	5 4	1 $\bar{6}$

Come suggerimento per rispondere al commento messo in nota, rappresento qui il gioco della tabella di destra a pagina 2. Si vede chiaramente che ha equilibri perfetti nei sottogiochi: $(M_L\ T_C\ M_R, R)$, evidenziato in figura con una freccetta posta sui rami e $(B_L\ T_C\ M_R, R)$, evidenziato con le due freccette apposte ai rami. Essi quindi saranno anche equilibri di Nash (messi in evidenza, tra l'altro, nella tabella seguente, parte di destra). Anche in questo caso abbiamo sei equilibri di Nash, che sono: $(T_L\ T_C\ M_R, R)$, $(M_L\ T_C\ M_R, R)$, $(B_L\ T_C\ M_R, R)$, $(T_L\ B_C\ M_R, R)$, $(M_L\ B_C\ M_R, R)$ e $(B_L\ B_C\ M_R, R)$.

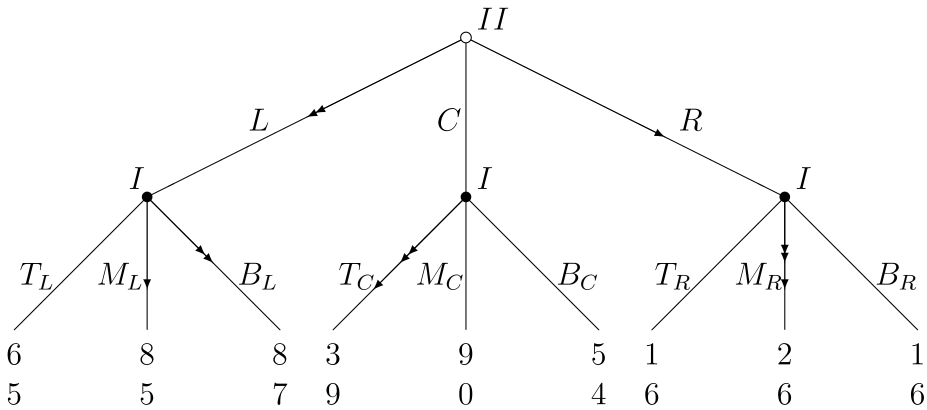


$I \backslash II$	L	C	R
$T_L\ T_C\ T_R$	6 5	9 0	1 6
$M_L\ T_C\ T_R$	8 4	9 0	1 6
$B_L\ T_C\ T_R$	8 3	9 0	1 6
$T_L\ M_C\ T_R$	6 5	3 9	1 6
$M_L\ M_C\ T_R$	8 4	3 9	1 6
$B_L\ M_C\ T_R$	8 3	3 9	1 6
$T_L\ B_C\ T_R$	6 5	5 4	1 6
$M_L\ B_C\ T_R$	8 4	5 4	1 6
$B_L\ B_C\ T_R$	8 3	5 4	1 6
$T_L\ T_C\ M_R$	6 5	9 0	2 6
$M_L\ T_C\ M_R$	8 4	9 0	2 6
$B_L\ T_C\ M_R$	8 3	9 0	2 6
$T_L\ M_C\ M_R$	6 5	3 9	2 6
$M_L\ M_C\ M_R$	8 4	3 9	2 6
$B_L\ M_C\ M_R$	8 3	3 9	2 6
$T_L\ B_C\ M_R$	6 5	5 4	2 6
$M_L\ B_C\ M_R$	8 4	5 4	2 6
$B_L\ B_C\ M_R$	8 3	5 4	2 6
$T_L\ T_C\ B_R$	6 5	9 0	1 6
$M_L\ T_C\ B_R$	8 4	9 0	1 6
$B_L\ T_C\ B_R$	8 3	9 0	1 6
$T_L\ M_C\ B_R$	6 5	3 9	1 6
$M_L\ M_C\ B_R$	8 4	3 9	1 6
$B_L\ M_C\ B_R$	8 3	3 9	1 6
$T_L\ B_C\ B_R$	6 5	5 4	1 6
$M_L\ B_C\ B_R$	8 4	5 4	1 6
$B_L\ B_C\ B_R$	8 3	5 4	1 6

$I \backslash II$	L	C	R
$T_L\ T_C\ T_R$	6 5	$\bar{9}$ 0	1 $\bar{6}$
$M_L\ T_C\ T_R$	$\bar{8}$ 4	$\bar{9}$ 0	1 $\bar{6}$
$B_L\ T_C\ T_R$	$\bar{8}$ 3	$\bar{9}$ 0	1 $\bar{6}$
$T_L\ M_C\ T_R$	6 5	3 $\bar{9}$	1 6
$M_L\ M_C\ T_R$	$\bar{8}$ 4	3 $\bar{9}$	1 6
$B_L\ M_C\ T_R$	$\bar{8}$ 3	3 $\bar{9}$	1 6
$T_L\ B_C\ T_R$	6 5	5 4	1 $\bar{6}$
$M_L\ B_C\ T_R$	$\bar{8}$ 4	5 4	1 $\bar{6}$
$B_L\ B_C\ T_R$	$\bar{8}$ 3	5 4	1 $\bar{6}$
$T_L\ T_C\ M_R$	6 5	$\bar{9}$ 0	$\bar{2}$ $\bar{6}$
$M_L\ T_C\ M_R$	$\bar{8}$ 4	$\bar{9}$ 0	$\bar{2}$ $\bar{6}$
$B_L\ T_C\ M_R$	$\bar{8}$ 3	$\bar{9}$ 0	$\bar{2}$ $\bar{6}$
$T_L\ M_C\ M_R$	6 5	3 $\bar{9}$	$\bar{2}$ 6
$M_L\ M_C\ M_R$	$\bar{8}$ 4	3 $\bar{9}$	$\bar{2}$ 6
$B_L\ M_C\ M_R$	$\bar{8}$ 3	3 $\bar{9}$	$\bar{2}$ 6
$T_L\ B_C\ M_R$	6 5	5 4	$\bar{2}$ $\bar{6}$
$M_L\ B_C\ M_R$	$\bar{8}$ 4	5 4	$\bar{2}$ $\bar{6}$
$B_L\ B_C\ M_R$	$\bar{8}$ 3	5 4	$\bar{2}$ $\bar{6}$
$T_L\ T_C\ B_R$	6 5	$\bar{9}$ 0	1 $\bar{6}$
$M_L\ T_C\ B_R$	$\bar{8}$ 4	$\bar{9}$ 0	1 $\bar{6}$
$B_L\ T_C\ B_R$	$\bar{8}$ 3	$\bar{9}$ 0	1 $\bar{6}$
$T_L\ M_C\ B_R$	6 5	3 $\bar{9}$	1 6
$M_L\ M_C\ B_R$	$\bar{8}$ 4	3 $\bar{9}$	1 6
$B_L\ M_C\ B_R$	$\bar{8}$ 3	3 $\bar{9}$	1 6
$T_L\ B_C\ B_R$	6 5	5 4	1 $\bar{6}$
$M_L\ B_C\ B_R$	$\bar{8}$ 4	5 4	1 $\bar{6}$
$B_L\ B_C\ B_R$	$\bar{8}$ 3	5 4	1 $\bar{6}$

Già che ci siamo, per chiudere vediamo anche la rappresentazione in forma estesa del gioco "problematico" presentato a pagina 2

Come si vede, abbiamo due equilibri perfetti nei sottogiochi: sia l'equilibrio $(M_L\ T_C\ M_R, R)$, evidenziato in figura con una freccetta posta sui rami, sia $(B_L\ T_C\ M_R, L)$, individuato dalle due freccette. Notare che la scelta prevista per II è diversa nei due SPE.



Esercizio 2 Si consideri la seguente affermazione: in un gioco “2 per 2” a somma variabile, se esiste un solo equilibrio di Nash esso è necessariamente:

- in strategie dominanti (almeno in senso debole);
- Pareto inefficiente.

E’ corretta? Motivare

Esercizio 2 Soluzione

L’affermazione non è corretta. Anzi, si può fare un esempio in cui entrambe le “sub-affermazioni” sono false:

$I \backslash II$	L	R
T	1 1	0 0
B	0 1	1 0

Questo gioco è a somma variabile, ha un unico equilibrio di Nash (in strategie pure), (T, L), che è efficiente (massimizza addirittura il payoff per *entrambi* i giocatori) e la strategia T non è dominante, neanche debolmente.

Chiaramente è stato considerato il gioco finito. Cambierebbe qualcosa se se ne considerasse l'estensione mista? No.

Resta naturalmente a somma variabile. Essendo L fortemente dominante, considerare le strategie miste per II non introduce nulla di nuovo (la best reply per II è sempre e solo L), e pertanto neanche per I. Comunque, nel disegno qui sotto sono rappresentate le best reply per rendere evidente che anche l'estensione mista continua ad avere un solo equilibrio di Nash.

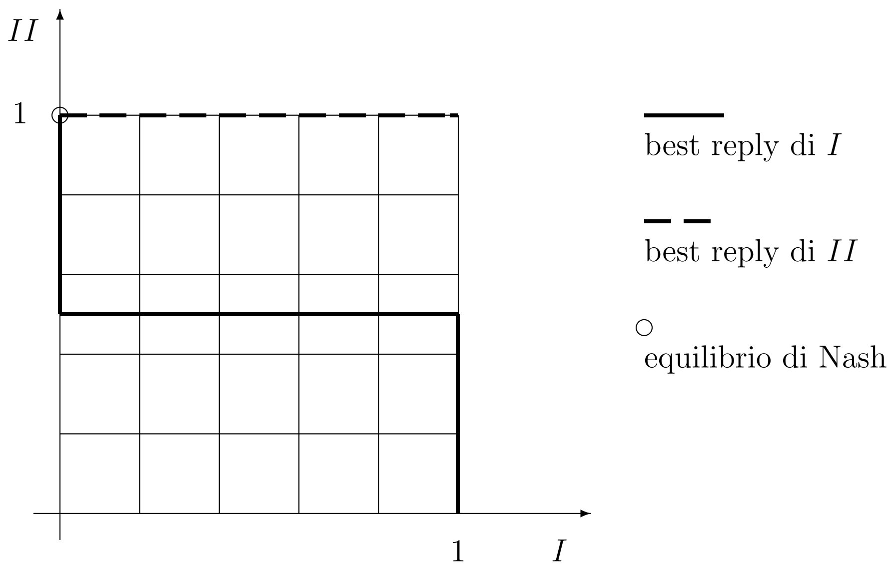


Figura 1: I grafici di R_I ed R_{II} e l'equilibrio di Nash