Si consideri il problema di allocazione di costi con tre agenti, i cui costi per ogni coalizione sono riportati nella tabella seguente:

S	1	2	3	12	13	23	123
$c(S)$	8	9	6	11	10	13	16

a. Determinare le soluzioni ECA, ACA e CGA.

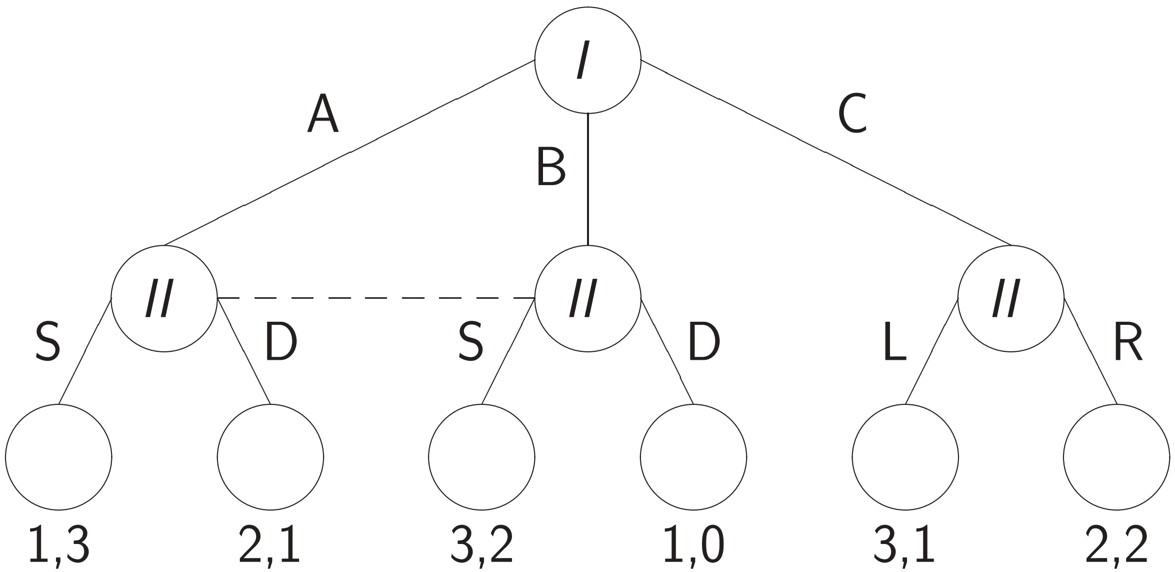
b. Determinare il valore di Shapley.

c. Quali delle soluzioni ottenute appartengono al nucleo del gioco?

S	1	2	3	12	13	23	123
$c(S)$	8	9	6	11	10	13	16
$m(i)$	3	6	5				
$g(S)$	5	3	1	2	2	2	2
$r(i)$	5	3	1				
$g(i)$	2	2	1				
$ECA(i)$	3.667	6.667	5.667				
$ACA(i)$	4.111	6.667	5.222				
$CGA(i)$	3.800	6.800	5.400				
$\phi(i)$	4.667	6.667	4.667				

Le soluzioni ECA, ACA e CGA appartengono al nucleo, mentre il valore di Shapley non verifica $\phi(1) + \phi(2) \leq c(12)$ e quindi non appartiene al nucleo.

Si consideri il seguente gioco in forma estesa:



a. Determinare gli equilibri di Nash in strategie pure.

b. Determinare quali sono equilibri perfetti nei sottogiochi.

Forma strategica

I / *II*	SL	SR	DL	DR
A	1,$\underline{3}$	1,$\underline{3}$	2,1	$\underline{2}$,1
B	$\underline{3}$,$\underline{2}$	$\underline{3}$,$\underline{2}$	1,0	1,0
C	$\underline{3}$,1	2,$\underline{2}$	$\underline{3}$,1	$\underline{2}$,$\underline{2}$

a. Ci sono tre equilibri di Nash in strategie pure: (B,SL), (B,SR) e (C,DR).

b. (B,SR) e (C,DR) sono equilibri perfetti nell'unico sottogioco proprio.

Si considerino due imprese A e B che operano secondo il modello di Cournot. Si supponga che il costo di produzione unitario dei beni sia $c = 0$. Si determinino le quantità ottimali che ciascuna impresa produce all'equilibrio, sapendo che la curva dei prezzi è dato da:

$$P(Q) = \begin{cases} (4-Q)^2 & se\ 0 \leq Q \leq 4 \\ 0 & se\ Q > 4 \end{cases}$$

Dette a e b le quantità prodotte da ciascuna impresa, l'utilità dell'impresa A è data da:

$$u_A = (4 - a - b)^2 a = a^3 + 2(4 - b)a^2 + (4 - b)^2 a$$

Derivando rispetto ad a si ottiene:

$$u'_A = 3a^2 + 4(4 - b)a + (4 - b)^2$$

che si annulla per $a = \frac{1}{3}(4 - b)$ e $a = (4 - b)$.
E' facile verificare che $a = \frac{1}{3}(4 - b)$ è un punto di massimo per u_A.
Per simmetria si ottiene che $b = \frac{1}{3}(4 - a)$ è un punto di massimo per u_B.
Risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3}(4 - b) \\ b = \frac{1}{3}(4 - a) \end{cases}$$

si ottiene: $a^* = b^* = 1$ e sostituendo $p^* = 4$ e $u_A^* = u_B^* = 4$.

Sia dato il gioco TU ad n giocatori, la cui funzione caratteristica è definita da:

$$v(S) = \begin{cases} |S| - 1 & \text{se } |S| \geq 1 \\ 0 & \text{se } |S| = \emptyset \end{cases}$$

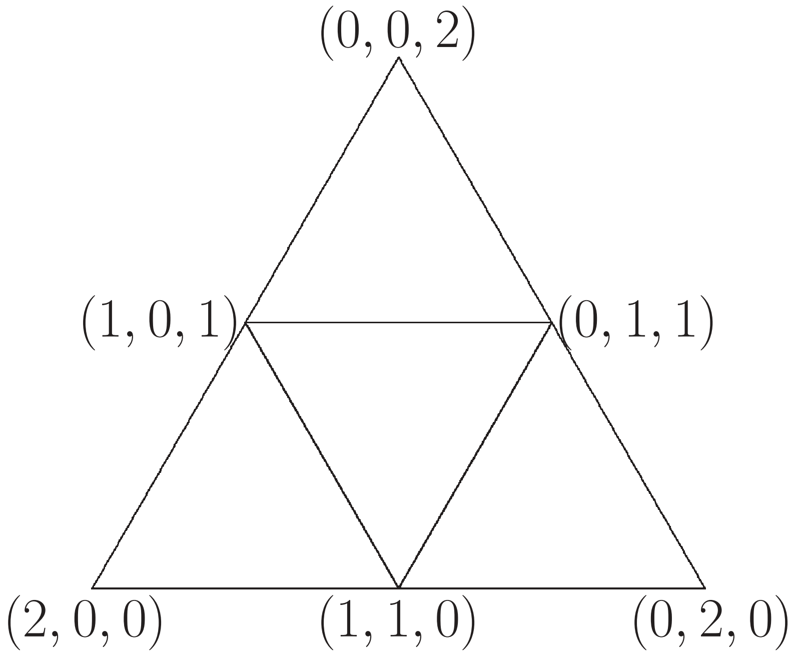
a. verificare che il nucleo è non vuoto, qualunque sia il numero di giocatori;

b. per $n = 3$ determinare tutte le allocazioni nel nucleo e completare con una rappresentazione grafica del nucleo;

c. per $n = 4$ calcolare il valore di Shapley.

a. E' sufficiente determinare una allocazione nel nucleo indipendente dal numero di giocatori; ad esempio esistono $x = (0, 1, 1, ..., 1)$ (con $x = 0$ se $n = 1$) oppure $x = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)_{i=1,...,n}$.

b. dalle relazioni che definiscono il nucleo si ricava $C(v) = \{x \in \mathbb{R}^3$ s.t. $x_i \geq 1, i = 1, ..., 3; x_1 + x_2 + x_3 = 2\}$.



c. per l'assioma di simmetria si ha che per ogni giocatore il valore di Shapley è dato da $\dfrac{v(N)}{n}$ e in questo caso si ha $\phi = (3/4, 3/4, 3/4, 3/4)$.

Si consideri il seguente gioco TU:

$$
\begin{aligned}
&N = \{1, 2, 3, 4\} \\
&v(S) = 0 && \text{se } |S| \leq 2 \\
&v(123) = 8 \\
&v(124) = 15 \\
&v(134) = 10 \\
&v(234) = 13 \\
&v(N) = 18
\end{aligned}
$$

a. Determinare una allocazione nel nucleo.

b. Determinare il valore di Shapley.

c. Determinare se il valore di Shapley appartiene al nucleo.

d. Determinare il valore minimo della grande coalizione affinchè il nucleo sia non vuoto.

a. Ad esempio $x = (3, 5, 3, 7)$ appartiene al nucleo.

b. Il calcolo risulta più semplice se si usa l'espressione

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} [v(S) - v(S \setminus \{i\})]$$

da cui si ottiene $\phi = \left(4, 5, \frac{10}{3}, \frac{17}{3}\right)$

c. Il valore di Shapley non appartiene al nucleo, ad esempio $\phi_1 + \phi_2 + \phi_4 = \frac{44}{3} < 15 = v(124)$.

d. Surrogando le relazioni

$$\begin{aligned}
x_1 &\leq v(N) - v(234) \\
x_2 &\leq v(N) - v(134) \\
x_3 &\leq v(N) - v(124) \\
x_4 &\leq v(N) - v(123)
\end{aligned}$$

si ottiene $3v(N) \geq 46$ e quindi $v(N) \geq \frac{46}{3}$.