Teoria dei giochi applicata alle scienze sociali, esame 8 luglio 2008

**foglio A**

Laurea Specialistica in Ingegneria Gestionale, Politecnico di MI, 2007/08

Tempo: 2 ore e 1/2; risolvere 3 dei 4 esercizi proposti; le risposte agli esercizi 3 e 4 non possono superare le due pagine; non è consentito l'uso di testi, appunti, etc...

**GIUSTIFICARE LE RISPOSTE**.

Non scrivere la soluzione di esercizi diversi su uno stesso foglio.

### Esercizio 1 A

Si consideri il seguente gioco:
tre giocatori, *I* , *II* e *III* , devono scegliere tra due alternative $A$ e $B$; *I* e *II* scelgono contemporaneamente, mentre *III* sceglie successivamente, conoscendo la scelta di *I* ma non quella di *II* . I giocatori vincono tutti 1 se tutti e tre effettuano la stessa scelta e tutti 0 negli altri casi.

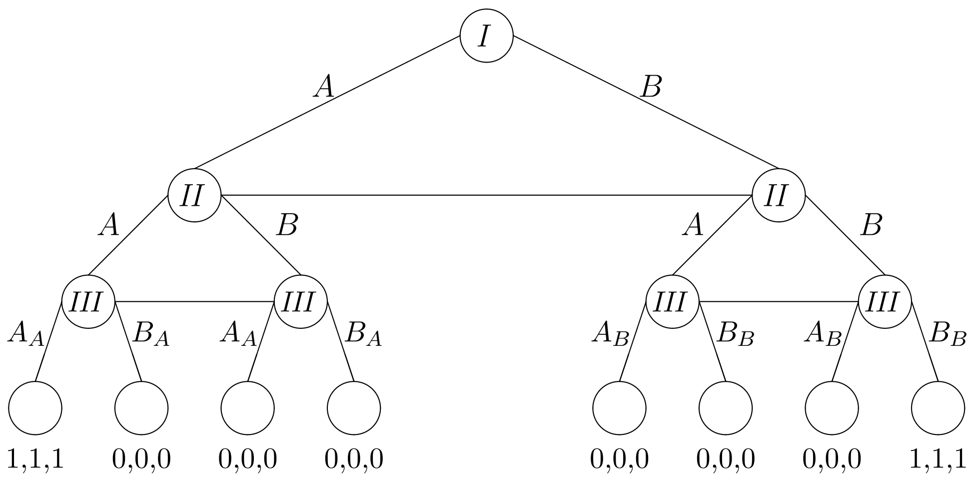
a. Determinare la rappresentazione ad albero.

b. Determinare la forma strategica.

c. Determinare gli eventuali equilibri di Nash in strategie pure.

### Soluzione

a.




b. La forma strategica è:

$I = A$

| $II \backslash III$ | $A_A A_B$ | $A_A B_B$ | $B_A A_B$ | $B_A B_B$ |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | $\underline{1},\underline{1},\underline{1}$ | $\underline{1},\underline{1},\underline{1}$ | $\underline{0},\underline{0},0$ | $\underline{0},\underline{0},0$ |
| $B$ | $\underline{0},0,\underline{0}$ | $0,0,\underline{0}$ | $\underline{0},\underline{0},\underline{0}$ | $0,\underline{0},\underline{0}$ |

$I = B$

| $II \backslash III$ | $A_A A_B$ | $A_A B_B$ | $B_A A_B$ | $B_A B_B$ |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | $0,\underline{0},\underline{0}$ | $0,0,\underline{0}$ | $\underline{0},\underline{0},\underline{0}$ | $\underline{0},0,\underline{0}$ |
| $B$ | $\underline{0},\underline{0},0$ | $\underline{1},\underline{1},\underline{1}$ | $\underline{0},\underline{0},0$ | $\underline{1},\underline{1},\underline{1}$ |

c. Gli equilibri di Nash in strategie pure sono $(A, A, A_A A_B)$, $(A, A, A_A B_B)$, $(A, B, B_A A_B)$, $(B, A, B_A A_B)$, $(B, B, A_A B_B)$, $(B, B, B_A B_B)$.

**Esercizio 2 A**

Si consideri il seguente TU-game:
$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{4\}) = 0$
$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = x$, $v(\{1,4\}) = v(\{2,4\}) = v(\{3,4\}) = 0$
$v(\{1,2,3\}) = v(\{1,2,4\}) = v(\{1,3,4\}) = v(\{2,3,4\}) = 10$
$v(\{1,2,3,4\}) = 20$

a. Calcolare il valore Shapley per $x = 10$.

b. Il valore Shapley (per $x = 10$) sta nel nucleo?

c. E' possibile calcolare il valore Shapley, qualunque sia $x \in \mathbb{R}$, utilizzando direttamente gli assiomi che lo caratterizzano?

d. Per quale valore di $x$ il gioco è superadditivo?

**Soluzione**

a.
Il valore Shapley può essere ottenuto sia calcolando il contributo marginale medio (media sulle 24 permutazioni di 1234), che usando la formula "condensata" $\Phi_i(v) = \sum_{i \in S \subseteq N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}[v(S) - v(S \setminus \{i\})]$. Si ottiene: $(140/24, 140/24, 140/24, 60/24)$. Il risultato può essere verificato usando il file excel disponibile al link Decisori (razionali) interagenti.

b.
Occorre verificare che $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ e che, per ogni $S \subseteq N$, $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$. La verifica è del tutto standard e il risultato è che il valore Shapley appartiene al nucleo. Vediamolo.

Essendo $x_i \geq 0$ per ogni $i \in N$, le disuguaglianza richieste sono soddisfatte per tutte le coalizioni $S$ per cui $v(S) = 0$. Inoltre, $x_i + x_j = 280/24 \geq 10$ per $i, j \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$. Quindi le disuguaglianza sono soddisfatte anche dalle coalizioni che contengono due elementi di $\{1,2,3\}$. Ne segue anche che sono soddisfatte dalle coalizioni di tre giocatori, visto che (come detto) $x_i \geq 0$ per ogni $i \in N$.
La validità della condizione $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ è garantita dalla "efficienza" del valore Shapley. [COMMENTO: Può valere comunque la spesa di verificarlo, come una sorta di "prova del nove" per scoprire eventuali errori di calcolo.]

c.
Sì. I giocatori $1,2,3$ sono simmetrici. Però il giocatore 4 non è "null player": $v(\{1,2,3,4\}) = 20 \neq 10 = v(\{1,2,3\}) + v(\{4\})$.

Basta però decomporre $v$ nella somma di due giochi[1], $v_1$ e $v_2$:
$v_1(S) = v(S)$ per ogni coalizione $S$ con al massimo due giocatori, e $v_1(S) = x$ per le rimanenti coalizioni (cioè di tre o quattro giocatori).
$v_2(S) = 0$ per ogni coalizione $S$ con al massimo due giocatori, Mentre $v(S) = 10 - x$ per le coalizioni di tre giocatori e $v_2(N) = 20 - x$.

Nel gioco $v_1$ il giocatore 4 è null player, quindi (usando simmetria ed efficienza): $\Phi(v_1) = (x/3, x/3, x/3, 0)$.

Nel gioco $v_2$ tutti i giocatori sono simmetrici e quindi (tenendo conto anche dell'efficienza): $\Phi(v_2) = ((20-x)/4, (20-x)/4, (20-x)/4, (20-x)/4)$.

Pertanto, $\Phi(v) = \Phi(v_1) + \Phi(v_2) = ((60+x)/12, (60+x)/12, (60+x)/12, (60-3x)/12)$.

[1] Ringrazio Saverio Russo per avermi segnalato che nella prima versione di questo file avevo considerato solo il "caso particolare" $x = 10$.

d:
Consideriamo $S, T$, con $S \cap T = \emptyset$, $S, T \subseteq \{1,2,3,4\}$, e verifichiamo che $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$.

1. Se $S = \emptyset$, è ovvio.

2. Se $S = \{1\}$, per $T = \{2\}$, deve essere: $v(S \cup T) = v(\{1,2\}) = x \geq 0 = v(\{1\}) + v(\{2\})$.
Quindi, condizione necessaria è che sia $x \geq 0$.
Se $x \geq 0$, per $S = \{i\}$ ($i \in N$) e $T \subseteq N \setminus \{i\}$ sia ha che:
- se $T$ contiene un solo elemento, $v(S \cup T) \geq 0$, mentre $v(S) + v(T) = 0$;
- se $T$ contiene due elementi, $v(S \cup T) = 10$, mentre $v(S) + v(T) \leq x$;
- se $T$ contiene te elementi, $S \cup T = N$ e quindi $v(S \cup T) = 20 \geq 10 = v(S) + v(T)$.

3. Se $S = \{1,2\}$ e $T = \{2\}$, deve essere $v(S \cup T) = 10 \geq v(S) + v(T) = x$. Quindi, condizione necessaria è che sia $x \leq 10$.
Se $x \leq 10$, per $S = \{i,j\}$ ($i,j \in N$, $i \neq j$) e $\emptyset \neq T \subseteq N \setminus \{i,j\}$, si ha che: $v(S \cup T) \geq 10$, mentre $v(S) + v(T) \leq x \leq 10$.

4. Se $S$ contiene tre elementi, la condizione è sempre verificata.
Quindi, il gioco è superadditivo se e solo se $0 \leq x \leq 10$.

**Esercizio 3 A**

Descrivere un paio di giochi fra i più noti, spiegando le ragioni per cui sono interessanti.

**Esercizio 4 A**

Illustrare le caratteristiche essenziali dei principali modelli di oligopolio.