Teoria dei giochi applicata alle scienze sociali, esame 5 settembre 2008

foglio A

Laurea Specialistica in Ingegneria Gestionale, Politecnico di MI, 2007/08

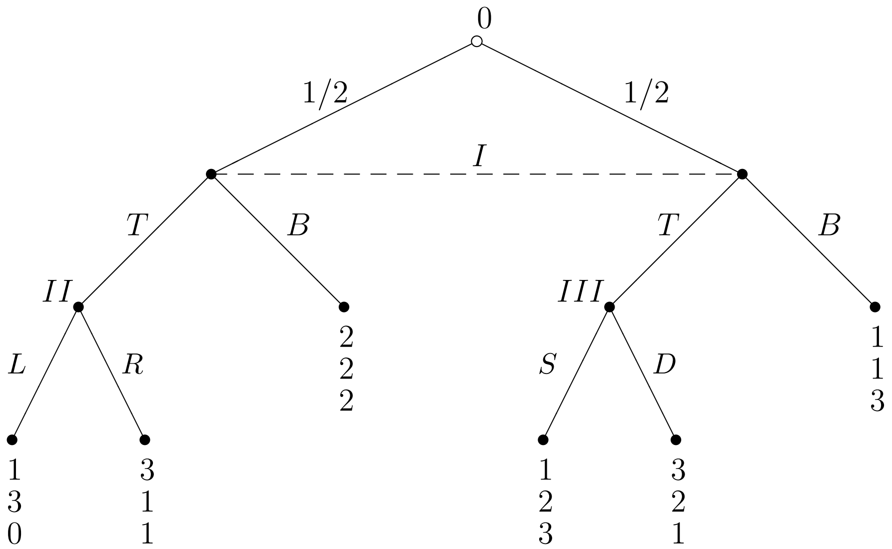
Tempo: 2 ore e 1/2; risolvere 3 dei 4 esercizi proposti; le risposte agli esercizi 3 e 4 non possono superare le due pagine; non è consentito l'uso di testi, appunti, etc...

GIUSTIFICARE LE RISPOSTE.

Non scrivere la soluzione di esercizi diversi su uno stesso foglio.

Esercizio 1 A

Si consideri il seguente gioco:



a. Scriverne la forma stategica.

b. Trovarne gli equilibri di Nash

c. Il gioco dato ha sottogiochi?

d. Troverne gli eventuali equilibri perfetti nei sottogiochi.

Soluzione

a.

La forma strategica è:

$II \backslash III$	S	D
L	1 5/2 3/2	2 5/2 1/2
R	2 3/2 2	3 3/2 1

I sceglie T

$II \backslash III$	S	D
L	3/2 3/2 5/2	3/2 3/2 5/2
R	3/2 3/2 5/2	3/2 3/2 5/2

I sceglie B

b.

Per trovare gli equilibri di Nash possiamo individuare la best reply dei tre giocatori. Lo facciamo sottolineando, al solito, i payoff corrispondenti.

$II \backslash III$	S	D
L	$1\ \ \underline{5/2}\ \ \underline{3/2}$	$\underline{2}\ \ \underline{5/2}\ \ 1/2$
R	$\underline{2}\ \ 3/2\ \ \underline{2}$	$\underline{3}\ \ 3/2\ \ 1$

I sceglie T

$II \backslash III$	S	D
L	$\underline{3/2}\ \ \underline{3/2}\ \ \underline{5/2}$	$3/2\ \ \underline{3/2}\ \ \underline{5/2}$
R	$3/2\ \ \underline{3/2}\ \ \underline{5/2}$	$3/2\ \ \underline{3/2}\ \ \underline{5/2}$

I sceglie B

Poiché l'unica cella che ha i tre payoff sottolineati è quella corrispondente al profilo di strategie (B, L, S), se ne deduce che questo profilo di strategie è anche l'unico equilibrio di Nash (in strategie pure) del gioco.

c.
Il gioco ha due sottogiochi propri, individuati dal nodo seguente le due scelte "T" del giocatore I.

d.
Nel sottogioco di sinistra la scelta ottimale per II (l'equilibrio del sottogioco) è L, in quello di destra è S (per III).

Quindi, l'equilibrio di Nash trovato, ristretto ai due sottogiochi propri, continua a rimanere un equilibrio (di quei sottogiochi). Perstanto è un equilibrio perfetto nei sottogiochi (SPE).

Esercizio 2 A

Si consideri il gioco TU definito dalla funzione caratteristica:

$$v(S) = \begin{cases} s & \text{se } s \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } s \text{ è dispari} \end{cases}$$

dove s è la cardinalità di S.

a. Determinare se il nucleo è vuoto ed in caso contrario determinare un'allocazione nel nucleo.

b. Determinare il valore di Shapley.

Soluzione

a.
Nel caso in cui $n = |N|$ sia pari il gioco è bilanciato; ad esempio un'allocazione è $x_i = 1,\ \forall\, i \in N$. Se n è dispari e maggiore o uguale a 3 il nucleo è vuoto in quanto $v(N) = 0$ ma $v(N \setminus \{i\}) = n - 1,\ \forall\, i \in N$; se $n = 1$ si ha il gioco nullo che è bilanciato con unica allocazione $x = 0$.

b.
Il gioco è sempre simmetrico per cui qualunque sia n il valore di Shapley è dato da:

$$\phi_i = \frac{v(N)}{n},\ \forall\, i \in N$$

Esercizio 3 A

Disctutere i problemi derivanti dalla non unicità dell'equilibrio di Nash.

Esercizio 4 A

Descrivere e commentare le proprietà richieste per avere un gioco TU