Teoria dei giochi applicata alle scienze sociali, esame 5 febbraio 2008

foglio A

Laurea Specialistica in Ingegneria Gestionale, Politecnico di MI, 2007/08

Tempo: 2 ore e 1/2; risolvere 3 dei 4 esercizi proposti; le risposte agli esercizi 3 e 4 non possono superare le due pagine; non è consentito l'uso di testi, appunti, etc...

GIUSTIFICARE LE RISPOSTE.

Non scrivere la soluzione di esercizi diversi su uno stesso foglio.

Esercizio 1 A

Si consideri il seguente gioco di costi cooperativo in forma caratteristica con $N = \{1, 2, 3, 4\}$ e c definita da:

S	1	2	3	4	12	13	14	23	24	34	123	124	134	234	1234
$c(S)$	8	8	8	8	15	15	15	15	15	15	23	19	20	22	27

a. Determinare le soluzioni ECA, ACA e CGA.

b. Dire quali delle precedenti soluzioni appartengono al nucleo.

Soluzione

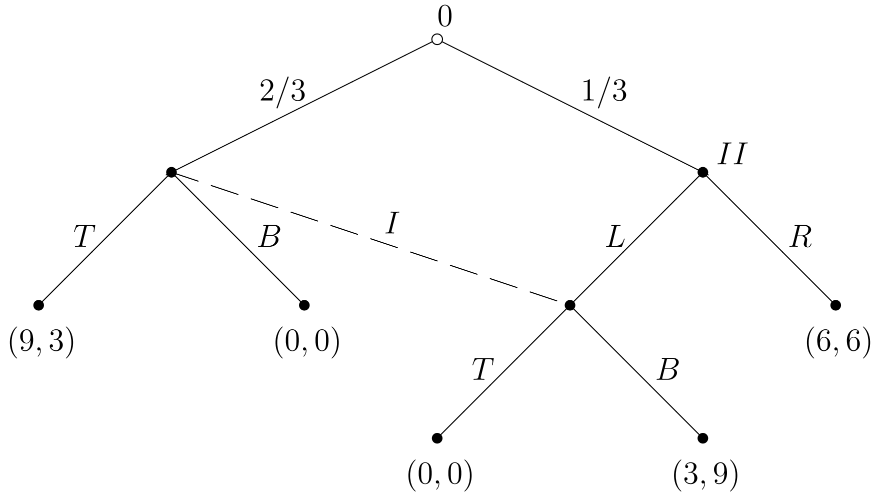
I costi separabili sono $m = (5, 7, 8, 4)$ e il costo non separabile è $g(N) = 3$.
I risparmi sono $r = (3, 1, 0, 4)$ e i costi non separabili delle coalizioni sono:

S	1	2	3	4	12	13	14	23	24	34	123	124	134	234	1234
$g(S)$	3	1	0	4	3	2	6	0	4	3	3	3	3	3	3

da cui $g = (2, 0, 0, 3)$.
Quindi si ha $ECA = (5.750, 7.750, 8.750, 4.750); ACA = (6.125, 7.375, 8.000, 5.500); CGA = (6.200, 7.000, 8.000, 5.800)$.
ECA non appartiene al nucleo; ad esempio $ECA_2 = 8.750 > 8 = c(2)$.
ACA non appartiene al nucleo; ad esempio $ACA_2 + ACA_3 = 15.375 > 15 = c(23)$.
CGA appartiene al nucleo.

Esercizio 2 A

Si consideri il seguente gioco:



a. Descriverne la forma strategica.

b. Esistono strategie dominanti o dominate?

c. Trovarne gli equilibri di Nash in strategie pure, se esistono.

d. Quali di questi sono perfetti nei sottogiochi e quali sono debolmente bayesiani perfetti?.

e. Il gioco ha ulteriori equilibri in strategie miste?.

Soluzione

La forma strategica del gioco si determina molto facilmente. Può essere utile fare i calcoli separatamente nel caso in cui la sorte sceglie il ramo di sinistra o di destra. Li accorpiamo in una sola matrice, mettendo a sinistra della casella i payoff dovuti al "ramo di sinistra" e a destra quelli derivanti dal "ramo di destra".

$I \backslash II$	L		R	
T	9 3	0 0	9 3	6 6
B	0 0	3 9	0 0	6 6

Quindi, ad esempio, i payoff corrispondenti a (T, L) sono: $\frac{2}{3}9 + \frac{1}{3}0 = 6$ per I e $\frac{2}{3}3 + \frac{1}{3}0 = 2$ per II. La forma strategica, pertanto, è:

$I \backslash II$	L	R
T	6 2	8 4
B	1 3	2 2

Si verifica immediatamente che T è fortemente (e quindi anche strettamente e debolmente) dominante. Naturalmente B sarà fortemente, etc. dominata.

L'unico equilibrio di Nash è (T, R). Che è anche perfetto nei sottogiochi, non essendovi sottogiochi propri.

La coppia (T, R) è anche un equilibrio bayesiano debolmente perfetto. E' sufficiente trovare, per ogni continuation game, dei belief che "giustifichino" le scelte ivi fatte.

Abbiamo due continuation game.

In quello che parte dall'insieme di informazione di I, T è una scelta ottimale per I purché i suoi belief assegnino una probabilità maggiore o uguale di un terzo al fatto di trovarsi nel nodo di sinistra. Ma la coppia di strategie (T, L) fa sì che:
- con probabilità $2/3$ ci si trovi nel nodo di sinistra;
- con probabilità 0 ci si trova nel nodo di destra.

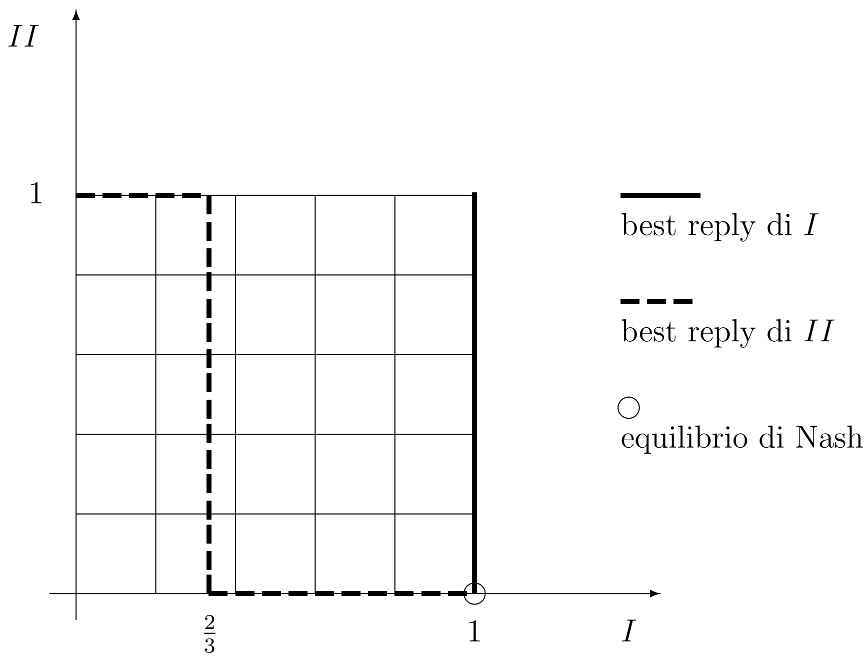
Quindi la coppia di strategie (T, R) *determina* i belief di I: l'unico sistema di belief che sia coerente con (T, R) assegna probabilità 1 al nodo di sinistra. Pertanto, l'ottimalità di T in questo continuation game è soddisfatta.

L'altro continuation game parte dal nodo in cui tocca giocare a II. Ovviamente qui non c'è molto da dire rispetto ai belief. Si tratta semplicemente di verificare se R è ottimale o no. Ma se II gioca R ottiene 6 (s'intende, condizionatamente al fatto di trovarsi nel nodo che stiamo esaminando); se gioca L, visto che I gioca T, ottiene 0.

Per la forte dominanza di T, la miglior risposta di I assegna sempre probabilità 1 a T, qualunque sia la strategia mista usata da II. E, a sua volta, l'unica strategia mista di II che sia miglior risposta a questa strategia mista degenere di I (che assegna probabilità 1 a T) è quella che assegna probabilità 1 a R. Pertanto, non vi sono altri equilibri in strategie miste.

Solo per curiosità vediamo come sono fatte le best reply. E' $f(p,q) = (6-q)p + (2-q)$ e $g(p,q) = (1-3p)q + (2+2p)$; Da qui, le best reply sono:
$R_I(q) = 1$ per ogni $q \in [0,1]$
$R_{II}(p) = 1$ se $p < 1/3$; $R_{II}(p) = [0,1]$ se $p = 1/3$; $R_{II}(p) = 0$ se $p > 1/3$

Il disegno delle best reply conferma quanto già detto:



Esercizio 3 A

Il ruolo della informazione nella interazione strategica.

Esercizio 4 A

Fornire una analisi comparativa dei concetti di equilibrio di Nash e di equilibrio perfetto nei sottogiochi (SPE).

Teoria dei giochi applicata alle scienze sociali, esame 5 febbraio 2008

foglio B

Laurea Specialistica in Ingegneria Gestionale, Politecnico di MI, 2007/08

Tempo: 2 ore e 1/2; risolvere 3 dei 4 esercizi proposti; le risposte agli esercizi 3 e 4 non possono superare le due pagine; non è consentito l'uso di testi, appunti, etc...

GIUSTIFICARE LE RISPOSTE.

Non scrivere la soluzione di esercizi diversi su uno stesso foglio.

Esercizio 1 B

Si consideri il seguente gioco di costi cooperativo in forma caratteristica con $N = \{1, 2, 3, 4\}$ e c definita da:

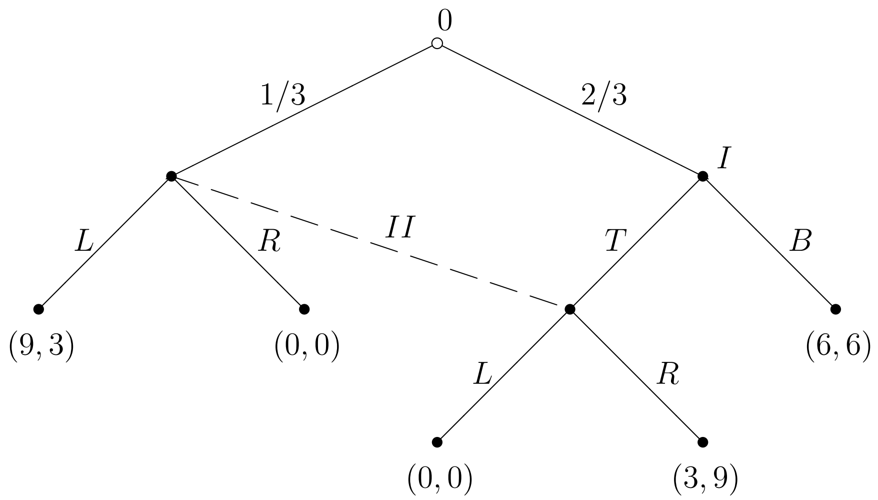
S	1	2	3	4	12	13	14	23	24	34	123	124	134	234	1234
$c(S)$	13	13	13	13	21	21	21	21	21	21	34	32	33	36	43

a. Determinare le soluzioni ECA, ACA e CGA.

b. Dire quali delle precedenti soluzioni appartengono al nucleo.

Esercizio 2 B

Si consideri il seguente gioco:



a. Descriverne la forma strategica.

b. Esistono strategie dominanti o dominate?

c. Trovarne gli equilibri di Nash in strategie pure, se esistono.

d. Quali di questi sono perfetti nei sottogiochi e quali sono debolmente bayesiani perfetti?.

e. Il gioco ha ulteriori equilibri in strategie miste?.

Esercizio 3 B

Il ruolo della informazione nella interazione strategica.

Esercizio 4 B

Fornire una analisi comparativa dei concetti di equilibrio di Nash e di equilibrio perfetto nei sottogiochi (SPE).