Teoria dei giochi applicata alle scienze sociali, esame 26 febbraio 2008

foglio A

Laurea Specialistica in Ingegneria Gestionale, Politecnico di MI, 2007/08

Tempo: 2 ore e 1/2; risolvere 3 dei 4 esercizi proposti; le risposte agli esercizi 3 e 4 non possono superare le due pagine; non è consentito l'uso di testi, appunti, etc...

GIUSTIFICARE LE RISPOSTE.

Non scrivere la soluzione di esercizi diversi su uno stesso foglio.

Esercizio 1 A

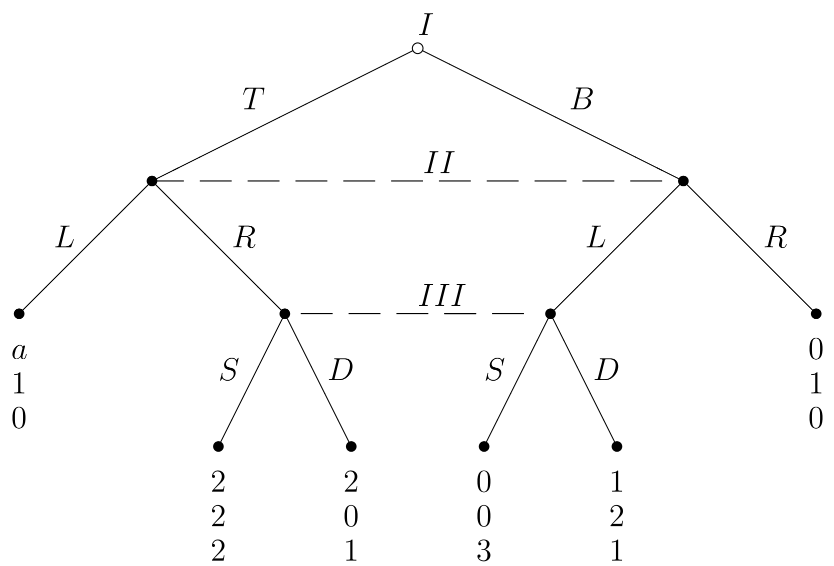
Si consideri il gioco TU con $N = \{1, 2, 3, 4\}$ e v definita da:

$$\begin{aligned}
&v(23) = v(24) = v(34) = 4;\\
&v(234) = 5;\\
&v(N) = 9;\\
&v(S) = 0, \text{ in tutti gli altri casi}
\end{aligned}$$

a. Determinare, se esiste, una allocazione nel nucleo.
b. Determinare il valore di Shapley del giocatore 1.
c. Determinare il valore di Shapley degli altri giocatori.
d. Determinare se il valore di Shapley appartiene al nucleo.

Esercizio 2 A

Si consideri il seguente gioco:



a. Descriverne la forma strategica.
b. Esistono strategie dominanti o dominate?
c. Trovarne gli equilibri di Nash in strategie pure, se esistono, al variare del parametro a.
d. Quali di questi sono perfetti nei sottogiochi e quali sono debolmente bayesiani perfetti?.

Esercizio 3 A

Illustrare almeno un paio di applicazioni dei giochi a informazione incompleta.

Esercizio 4 A

Presentare il valore Shapley

Teoria dei giochi applicata alle scienze sociali, esame 26 febbraio 2008

foglio B

Laurea Specialistica in Ingegneria Gestionale, Politecnico di MI, 2007/08

Tempo: 2 ore e 1/2; risolvere 3 dei 4 esercizi proposti; le risposte agli esercizi 3 e 4 non possono superare le due pagine; non è consentito l'uso di testi, appunti, etc...

GIUSTIFICARE LE RISPOSTE.

Non scrivere la soluzione di esercizi diversi su uno stesso foglio.

Esercizio 1 B

Si consideri il gioco TU con $N = \{1, 2, 3, 4\}$ e v definita da:

$$\begin{aligned} &v(23) = v(24) = v(34) = 8;\\ &v(234) = 11;\\ &v(N) = 19;\\ &v(S) = 0, \text{ in tutti gli altri casi} \end{aligned}$$

a. Determinare, se esiste, una allocazione nel nucleo.
b. Determinare il valore di Shapley del giocatore 1.
c. Determinare il valore di Shapley degli altri giocatori.
d. Determinare se il valore di Shapley appartiene al nucleo.

Soluzione

a. Ad esempio $x = (5, 5, 5, 4) \in Core(v)$.

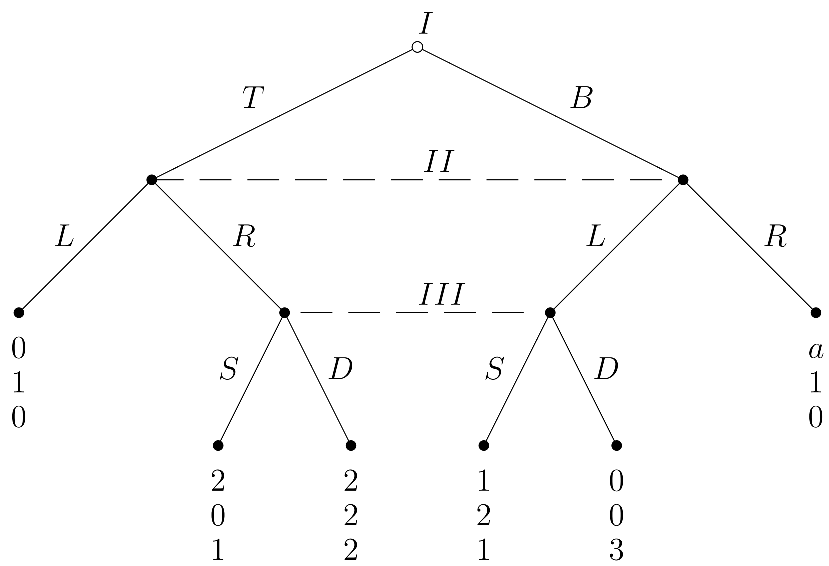
b. Il giocatore 1 appartiene alle coalizioni $1, 12, 13, 14, 123, 124, 134, N$ e i rispettivi contributi marginali sono $0, 0, 0, 0, -8, -8, -8, 8$ da cui è facile calcolare $\phi_1 = \frac{2!1!}{4!}(-8) + \frac{2!1!}{4!}(-8) + \frac{2!1!}{4!}(-8) + \frac{3!0!}{4!}(8) = -\frac{3 \times 8}{12} + 2 = 0$.

c. Gli altri giocatori sono simmetrici, per cui si ha $\phi_i = \frac{19}{3}$.

c. Il valore Shapley, ovvero $\phi = (0, \frac{19}{3}, \frac{19}{3}, \frac{19}{3})$, appartiene al nucleo.

Esercizio 2 B

Si consideri il seguente gioco:



a. Descriverne la forma strategica.
b. Esistono strategie dominanti o dominate?
c. Trovarne gli equilibri di Nash in strategie pure, se esistono, al variare del parametro a.
d. Quali di questi sono perfetti nei sottogiochi e quali sono debolmente bayesiani perfetti?.

Soluzione

a.

La forma strategica è la seguente:

I \ II	L	R
T	$0,1,0$	$2,0,1$
B	$1,2,1$	$a,1,0$

S

I \ II	L	R
T	$0,1,0$	$2,2,2$
B	$0,0,3$	$a,1,0$

D

III

Anche se faremo nel seguito sempre riferimento alla forma strategica sopra indicata, nulla osta ad assegnare il ruolo di giocatore "che sceglie la matrice" al giocatore I, vedendo il giocatore II come quello "che sceglie le righe" e il giocatore III come quello "che sceglie le colonne". Otteniamo allora (la chiameremo "rappresentazione 2-3-1"):

II \ III	S	D
L	$0,1,0$	$0,1,0$
R	$2,0,1$	$2,2,2$

T

II \ III	S	D
L	$1,2,1$	$0,0,3$
R	$a,1,0$	$a,1,0$

B

I

E' anche possibile, per quanto sconsigliabile e comunque da integrare con un esplicito riferimento a ciò che si sta facendo, variare l'ordine dei payoff in modo che in una cella compaia prima il payoff del giocatore "che sceglie la riga" (in questo caso avremmo scelto il giocatore II), poi il giocatore "che sceglie la colonna" (qui sarebbe III) e infine il giocatore "che sceglie la matrice" (qui I). Otteniamo (la chiameremo "rappresentazione 2-3-1 doppia"):

II \ III	S	D
L	$1,0,0$	$1,0,0$
R	$0,1,2$	$2,2,2$

T

II \ III	S	D
L	$2,1,1$	$0,3,0$
R	$1,0,a$	$1,0,a$

B

I

Vedremo al punto seguente che effetti abbiano queste scelte "alternative" per quanto riguarda la individuazione delle "best reply".

b.

Disegniamo le "migliori risposte".

Caso $a < 2$:

I \ II	L	R
T	$0,\bar{1},\bar{0}$	$\bar{2},0,1$
B	$\bar{1},\bar{2},1$	$a,1,\bar{0}$

S

I \ II	L	R
T	$\bar{0},1,\bar{0}$	$\bar{2},\bar{2},\bar{2}$
B	$\bar{0},0,\bar{3}$	$a,\bar{1},\bar{0}$

D

III

Caso $a = 2$:

I \ II	L	R
T	$0,\bar{1},\bar{0}$	$\bar{2},0,1$
B	$\bar{1},\bar{2},1$	$\bar{a},1,\bar{0}$

S

I \ II	L	R
T	$\bar{0},1,\bar{0}$	$\bar{2},\bar{2},\bar{2}$
B	$\bar{0},0,\bar{3}$	$\bar{a},\bar{1},\bar{0}$

D

III

Caso $a > 2$:

I \ II	L	R
T	$0,\bar{1},\bar{0}$	$2,0,1$
B	$\bar{1},\bar{2},1$	$\bar{a},1,\bar{0}$

S

I \ II	L	R
T	$\bar{0},1,\bar{0}$	$2,\bar{2},\bar{2}$
B	$\bar{0},0,\bar{3}$	$\bar{a},\bar{1},\bar{0}$

D

III

Dalle tabelle sopra, si verifica facilmente che:
- se $a \geq 2$, B domina strettamente (e quindi anche debolmente) T. Se $a < 2$, non si ha dominanza;
- fra le strategie di II non si ha mai dominanza, per nessun valore di a.
- la strategia D è strettamente (e quindi anche debolmente) dominante per III, per qualunque valore di a.

Prima di passare al punto seguente, vediamo cosa succede nella determinazione della "best reply" se usiamo la "rappresentazione 2-3-1". Ci limitiamo ad evidenziare, *nel caso* $a < 2$, la miglior risposta del giocatore I, in modo che siano più evidenti i cambiamenti che derivano dalla scelta di una diversa rappresentazione:

II \ III	S	D
L	$0,1,0$	$\bar{0},1,0$
R	$\bar{2},0,1$	$\bar{2},2,2$

T

II \ III	S	D
L	$\bar{1},2,1$	$\bar{0},0,3$
R	$a,1,0$	$a,1,0$

B

I

Vediamo lo stesso per la "rappresentazione 2-3-1 doppia":

II \ III	S	D
L	$1,0,0$	$1,0,\bar{0}$
R	$0,1,\bar{2}$	$2,2,\bar{2}$

T

II \ III	S	D
L	$2,1,\bar{1}$	$0,3,\bar{0}$
R	$1,0,a$	$1,0,a$

B

I

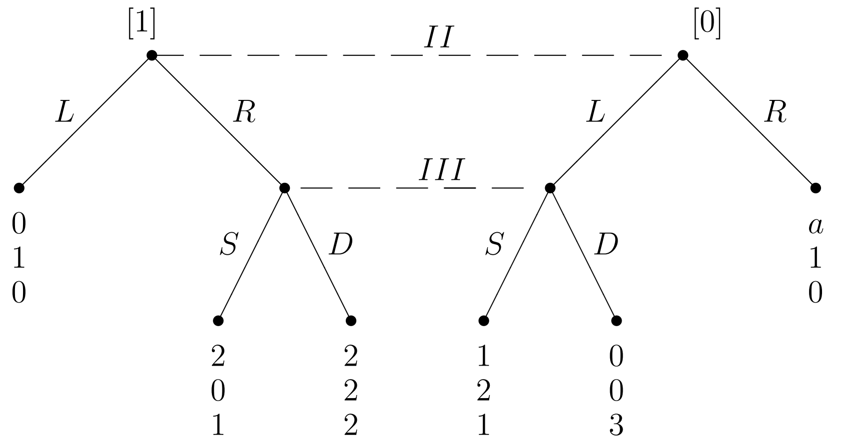
Va da sé che l'uso di queste (o altre) diverse rappresentazioni *non ha nessun effetto* sulle conclusioni tratte rispetto alle condizioni di dominanza o sugli equilibri di Nash.

c.
Sempre dalle tabelle con la "best reply" si deduce che:
- se $a < 2$, (T, R, D) è l'unico equilibrio di Nash
- se $a = 2$, (T, R, D) e (B, R, D) sono equilibri di Nash
- se $a > 2$, (B, R, D) è l'unico equilibrio di Nash.

d.
Per quanto riguarda i SPE, il gioco dato non ha sottogiochi e quindi ogni equilibrio di Nash è anche perfetto nei sottogiochi.

In quanto agli equilibri bayesiani debolmente perfetti, ci limitiamo a vedere in dettaglio il caso $a = 2$ (il trattamento per $a \neq 2$ è perfettamente analogo).

Consideriamo l'equilibrio (T, R, D). Il cammino di equilibrio "attraversa" entrambi gli insiemi di informazione e pertanto gli unici belief coerenti con tale profilo di strategie sono quelli che assegnano probabilità 1 al nodo di sinistra, in entrambi gli insiemi di informazione. Vediamo esplicitamente i due "continuation games":



La forma strategica per questo "continuation game" (tenendo conto dei belief indicati) è (a destra sono evidenziate le "migliori risposte"):

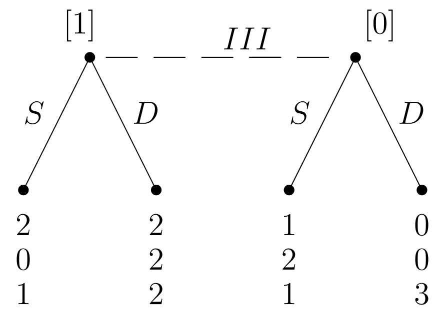
II \ III	S	D
L	$1,0$	$1,0$
R	$0,1$	$2,2$

II \ III	S	D
L	$\bar{1},\bar{0}$	$1,0$
R	$0,1$	$\bar{2},\bar{2}$

Notare che abbiamo riportato solo i payoff di II e di III.

Dalla forma strategica si vede che la restrizione di (T, R, D) a questo "continuation game", ovvero (R, D), è un equilibrio di Nash per questo gioco.

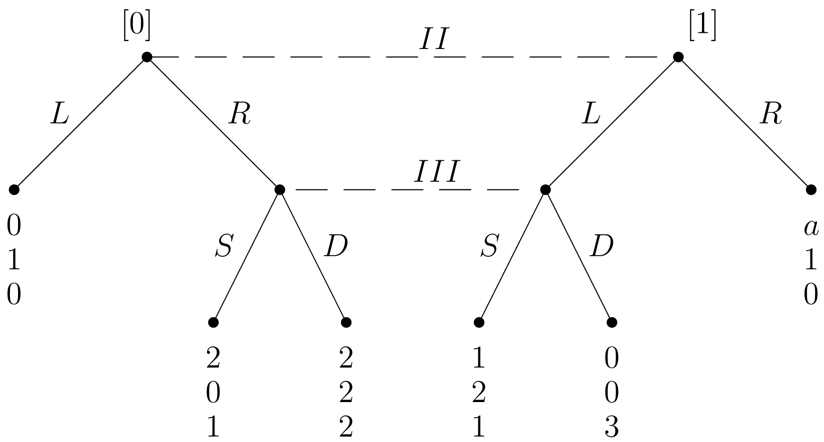
Il secondo "continuation game" è:



Anche in questo gioco di continuazione, la restrizione di (T, R, D), ovvero D, è un equilibrio di Nash. Essendo coinvolto un solo giocatore, ciò è naturalmente equivalente a osservare che D è la scelta ottimale per III. In effetti, dati i belief di III, scegliendo D III si attende di ottenere un payoff 2, mentre scegliendo S sarebbe 1.

Analizziamo ora l'equilibrio (B, R, D). In questo caso, i belief per II sono detreminati ed assegnano probabilità 1 al nodo di destra. Non c'è invece alcuna restrizione sui belief di III nel "suo" insieme di informazione.

Vediamo anche qui i "continuation games".



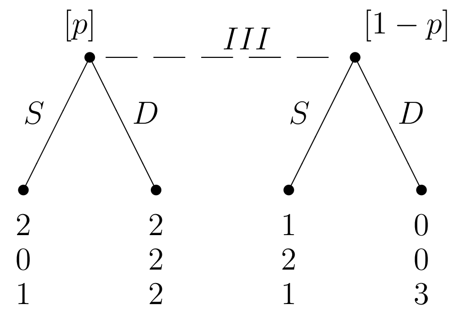
La forma strategica per questo "continuation game", tenendo conto dei belief indicati, è (a destra sono evidenziate le "migliori risposte"):

II \ III	S	D
L	$2, 1$	$0, 3$
R	$1, 0$	$1, 0$

II \ III	S	D
L	$\bar{2}, 1$	$0, \bar{3}$
R	$1, \bar{0}$	$\bar{1}, \bar{0}$

Da cui si vede che la restrizione di (B, R, D) a questo "continuation game", ovvero (R, D) è un equilibrio di Nash per questo gioco.

Il secondo "continuation game" è:



Anche in questo gioco di continuazione, la restrizione di (B, R, D), ovvero D, è un equilibrio di Nash. Essendo coinvolto un solo giocatore, ciò è naturalemente equivalente a osservare che D è la scelta ottimale per III. In effetti, qualunue siano i belief di III, scegliendo D III si attende di ottenere un payoff maggiore di quello che avrebbe scegliendo S.

Quindi anche (B, R, D) è un equilibrio bayesiano debolmente perfetto, "supportato" da un sistema di belief che assegna probabilità 1 al nodo di destra nell'insieme di informaizone di II e da qualsiasi sistema di belief per l'insieme di informazione di III.

Esercizio 3 B

Illustrare almeno un paio di applicazioni dei giochi a informazione incompleta.

Esercizio 4 B

Presentare il valore Shapley