# 1 Giochi cooperativi

## 1.1 Introduzione

I giocatori possono associarsi per migliorare il proprio risultato
Per realizzare la cooperazione:

- deve essere possibile stipulare accordi (ad esempio non devono esserci regole antitrust o difficoltà di comunicazione)
- deve esserci la possibilità di far rispettare tali accordi, nel senso che deve esistere una autorità sufficientemente forte e accettata da tutti i componenti

Si distinguono due sottoclassi:

- Giochi cooperativi senza pagamenti laterali (NTU-Games)
  i giocatori ricevono un payoff assegnato
- Giochi cooperativi a pagamenti laterali (TU-Games)
  i giocatori di una coalizione possono ripartirsi in qualsiasi modo la vincita

I secondi costituiscono un caso particolare dei primi

In particolare per avere un gioco TU devono essere soddisfatte tre ipotesi:

- deve essere possibile trasferire l'utilità (da un punto di vista normativo)
- deve esistere un mezzo comune di scambio, ad esempio il denaro, con cui trasferire l'utilità (da un punto di vista materiale)
- le funzioni di utilità dei giocatori devono essere equivalenti

**Esempio 1.1 (Coalizione semplice)** *Sono dati tre giocatori I, II, III; se due di loro si accordano, formando una coalizione, il terzo giocatore da ad ognuno di essi una moneta, altrimenti nessuno riceve nulla. I payoff sono:*

| | |
|---|---|
| $(1, 1, -2)$ | *se I e II si coalizzano* |
| $(1, -2, 1)$ | *se I e III si coalizzano* |
| $(-2, 1, 1)$ | *se II e III si coalizzano* |
| $(0, 0, 0)$ | *altrimenti* |

*Se i payoff relativi alla coalizione (II, III) fossero* $(-2.0, 1.1, 0.9)$ *la posizione del giocatore II non si rafforza in quanto il giocatore III ha più interesse a coalizzarsi con I che con II; questa situazione non sussiste nel caso in cui sia possibile per II "trasferire" parte della propria vincita al giocatore III, ritornando alla situazione precedente* $\diamondsuit$

### 1.1.1 Funzione caratteristica per un gioco TU

Può essere costruita a partire dal gioco a due persone tra $S$ ed $N \setminus S$:

$$v'(S) = \max_{\sigma_S \in \Sigma_S} \quad \min_{\sigma_{N\setminus S} \in \Sigma_{N\setminus S}} \left\{ \sum_{i \in S} u_i(\sigma_S, \sigma_{N\setminus S}) \right\} \quad \text{(von Neumann-Morgenstern)}$$

$$v''(S) = \min_{\sigma_{N\setminus S} \in \Sigma_{N\setminus S}} \quad \max_{\sigma_S \in \Sigma_S} \left\{ \sum_{i \in S} u_i(\sigma_S, \sigma_{N\setminus S}) \right\}$$

I due risultati possono non coincidere $(v'' \geq v')$

Il problema è assegnare correttamente il valore di $v(S)$

**Esempio 1.2 (Costruzione della funzione caratteristica - I)** *Si consideri il seguente gioco a tre giocatori:*

| 3 = S | | |
|---|---|---|
| *1 / 2* | $L$ | $R$ |
| $T$ | $1, 0, 4$ | $1, 0, -2$ |
| $B$ | $1, 2, -3$ | $0, -1, -5$ |

| 3 = C | | |
|---|---|---|
| *1 / 2* | $L$ | $R$ |
| $T$ | $1, -3, -3$ | $2, 0, -4$ |
| $B$ | $0, 1, 4$ | $0, -1, -2$ |

| 3 = D | | |
|---|---|---|
| *1 / 2* | $L$ | $R$ |
| $T$ | $1, 4, 3$ | $2, -3, 4$ |
| $B$ | $2, 2, 3$ | $0, 1, 5$ |

*Volendo determinare il valore di $v$ si può costruire il gioco tra $S = \{1, 2\}$ e $N \setminus S = \{3\}$:*

| $S$ / $N \setminus S$ | $N_1$ | $N_2$ | $N_3$ |
|---|---|---|---|
| $S_1$ | $1, 4$ | $-2, -3$ | $5, 3$ |
| $S_2$ | $1, -2$ | $2, -4$ | $-1, 4$ |
| $S_3$ | $3, -3$ | $1, 4$ | $4, 3$ |
| $S_4$ | $-1, -5$ | $-1, -2$ | $1, 5$ |

*dove* $S_1 = (T, L)$, $S_2 = (T, R)$, $S_3 = (B, L)$, $S_4 = (B, R)$ *e* $N_1 = S$, $N_2 = C$, $N_3 = D$

$$v'(S) = \max_{\sigma_S \in \Sigma_S} \min_{\sigma_{N \setminus S} \in \Sigma_{N \setminus S}} \left\{ \widehat{u}_i(\sigma_S, \sigma_{N \setminus S}) \right\} = \max\{-2, -1, 1, -1\} = 1$$

$$v''(S) = \min_{\sigma_{N \setminus S} \in \Sigma_{N \setminus S}} \max_{\sigma_S \in \Sigma_S} \left\{ \widehat{u}_i(\sigma_S, \sigma_{N \setminus S}) \right\} = \min\{3, 2, 5\} = 2$$

*$v'(S)$ corrisponde alla strategia $S_3$ ed in effetti la coalizione $S$ giocando $S_3 = (B, L)$ può garantirsi un payoff non inferiore a 1, mentre il valore $v''(S)$ corrisponde alla strategia $S_2$, ma la coalizione $S$ giocando $S_2 = (T, R)$ non può garantirsi un payoff non inferiore a 2, anzi probabilmente il suo payoff risulterà inferiore*
*Entrambe le interpretazioni difettano di realismo poichè lo scopo della coalizione $N \setminus S$ è quello di massimizzare il proprio payoff e non di minimizzare il payoff di $S$*
*La validità delle formule precedenti è limitata dal fatto di non considerare le utilità di $N \setminus S$: in questo caso è facile osservare che $N \setminus S$ considera "rischiose" le strategie $N_1$ ed $N_2$, in corrispondenza delle quali si hanno i valori $v'(S)$ e $v''(S)$* $\diamondsuit$

Le funzioni di utilità sono solo rappresentazioni delle preferenze dei giocatori, pertanto la scelta delle strategie dei giocatori di $S$ dovrebbe avvenire non sulle funzioni di utilità, ma sulle preferenze

Triplicando le utilità del giocatore 1 si ottiene:

| $S$ / $N \setminus S$ | $N_1$ | $N_2$ | $N_3$ |
|---|---|---|---|
| $S_1$ | $3, 4$ | $0, -3$ | $7, 3$ |
| $S_2$ | $3, -2$ | $6, -4$ | $3, 4$ |
| $S_3$ | $5, -3$ | $1, 4$ | $8, 3$ |
| $S_4$ | $-1, -5$ | $-1, -2$ | $1, 5$ |

e quindi:

$$v'(S) = max\{0, 3, 1, -1\} = 3$$
$$v''(S) = min\{5, 6, 8\} = 5$$

I valori risultano differenti, ma soprattutto si ottengono in corrispondenza di differenti strategie per la coalizione $S$, in particolare $v'(S)$ si ottiene per $S_2$ e $v''(S)$ per $S_3$

Alle funzioni di utilità è stato dato un significato quantitativo che non necessariamente hanno

Le funzioni di utilità non sono necessariamente additive, quindi non si può definire l'utilità della coalizione come la somma delle utilità

La funzione caratteristica assegna ad ogni coalizione l'utilità che i giocatori possono ottenere "indipendentemente" dagli altri, non "qualunque sia la strategia" degli altri giocatori oppure "escludendo" gli altri giocatori
Si può utilizzare il significato di "senza la collaborazione" degli altri giocatori

**Esempio 1.3 (Costruzione della funzione caratteristica - II)** *Due fratelli, I e II, devono dividersi un'eredità (oggetti A, B, C, D) con le valutazioni:*

| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |
|---|---|---|---|---|
| $I$ | 12 | 10 | 9 | 6 |
| $II$ | 2 | 3 | 1 | 5 |

*L'esecutore testamentario in mancanza di un accordo assegnerà 2 oggetti a ciascuno, a sua discrezione*
*Nel peggiore dei casi I ottiene C e D e II ottiene A e C*
*Porre* $v(\{I\}) = 15$ *(oggetti C e D) implica che II voglia tenersi gli oggetti A e B (improbabile perchè lascerebbe l'oggetto D)*
*Analogamente* $v(\{I\}) = 22$ *(oggetti A e B) implica che II accetti di prendere l'oggetto C che per lui ha valore minimo*
*I è in grado di garantirsi* $v(\{I\}) = 21$ *(oggetti A e C) (gli oggetti B e D hanno maggior valore per II)*
*Analogamente II può ottenere "senza la collaborazione" di I* $v(\{II\}) = 6$ *(oggetti C e D, lasciando a I gli oggetti A e B di maggior valore)*
$v(\{I,\ II\}) = 37$ *(tutti gli oggetti a I e ripartizione del valore tra i due giocatori)* $\diamondsuit$

- Se il gioco fosse stato ad utilità non trasferibile la funzione caratteristica avrebbe assegnato alla grande coalizione tutte le coppie di valori che i due giocatori possono ottenere, ad esempio $(12, 9)$ corrispondente a dare l'oggetto A al giocatore I e gli altri tre oggetti al giocatore II, oppure $(18, 4)$ corrispondente a dare al giocatore I gli oggetti A e D e al giocatore II gli oggetti B e C, oppure $(0, 11)$ corrispondente a dare i quattro oggetti al giocatore II e così via

Sono state proposte altre definizioni per $v(S)$, ad esempio il valore ottenuto in corrispondenza delle strategie che massimizzano la differenza tra il payoff di $S$ e di $N \setminus S$, ma nessuna supera le questioni poste, a meno di oppurtune ipotesi sulle funzioni di utilità, ad esempio supporre che siano additive e uguali per tutti i giocatori

### 1.2 Giochi cooperativi a pagamenti laterali

In questi giochi introdotti da Von Neumann e Morgenstern (1944) i giocatori possono stipulare accordi vincolanti e possono ripartirsi la vincita con un accordo al di fuori delle regole del gioco, la cui validità può estendersi anche oltre la fine del gioco

Come trasferire la vincita se i giocatori hanno differenti funzioni di utilità?

**Definizione 1.1** *Un gioco TU è una coppia* $G = (N, v)$ *dove* $N$ *è l'insieme dei giocatori e* $v$ *è la funzione caratteristica, con* $v(\emptyset) = 0$

Se $v(S) \leq 0$ si ha un *gioco di costi* o cost game $(N, c)$ in cui si pone $c = -v$

**Esempio 1.4 (Gioco dei guanti)** *Due insiemi di giocatori, $L$ ed $R$, possiedono dei guanti; i giocatori di $L$ possiedono solo guanti sinistri mentre i giocatori di $R$ possiedono solo guanti destri. Il valore di una coalizione è dato dal numero di paia di guanti che riescono a formare. In generale ogni giocatore possiede un solo guanto. Se i giocatori di $L$ sono 1 e 2 e i giocatori di $R$ sono 3 e 4 si ha:*

$$
\begin{array}{ll}
N = \{1,2,3,4\} & \\
v(i) = 0 & \forall\ i \in N \\
v(12) = v(34) = 0 & \\
v(S) = 1 & se\ |S| = 2\ e\ S \neq \{12\}, S \neq \{34\}\ oppure\ se\ |S| = 3 \\
v(N) = 2 &
\end{array}
$$

$\diamondsuit$

**Definizione 1.2** *Un gioco* $G = (N, v)$ *si dice monotono se* $v(S) \leq v(T), \ \forall \ S \subseteq T$

**Definizione 1.3** *Un gioco* $G = (N, v)$ *si dice convesso se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:*

- $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T), \ \forall \ S, T \subseteq N$
- $v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T), \ \forall \ S \subset T \subseteq N \setminus \{i\}$

**Definizione 1.4** *Un gioco* $G = (N, v)$ *si dice semplice 0-1 o semplice se le coalizioni possono assumere solo i valori 0 e 1*
*Se una coalizione ha valore 1 è detta vincente, se ha valore 0 è detta perdente Solitamente la grande coalizione è vincente*

**Definizione 1.5** *Un gioco* $G = (N, v)$ *si dice coesivo se per ogni partizione di* $N$ $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ *si ha:*

$$\sum_{i=1,\ldots,k} v(S_i) \leq v(N)$$

- Nella definizione di monotonia non si tiene conto della cardinalità delle coalizioni
- L'equivalenza delle definizioni di convessità è oggetto di un teorema.
- I giochi semplici trovano applicazione nelle situazioni in cui una coalizione è caratterizzata dal riuscire a conseguire o meno un determinato risultato, come nei giochi di maggioranza, utilizzati in politica
- La coesività è più debole della superadditività ed esprime la "convenienza" dei giocatori a formare la grande coalizione, piuttosto che riunirsi in sottocoalizioni. L'importanza deriva dal fatto che in generale i concetti di soluzione più comuni costituiscono una ripartizione del valore della grande coalizione

Le soluzioni di un gioco TU possono essere raggruppate in due famiglie:

- *soluzioni insiemistiche* che individuano un insieme di vettori payoff che ripartiscono il valore del gioco tra tutti i giocatori
- *soluzioni puntuali* che individuano una sola ripartizione e che costituiscono l'attuale tendenza in quanto più simili all'idea classica di soluzione di un problema

# 2 Soluzioni insiemistiche di un gioco TU

## 2.1 Imputazioni

Per determinare le singole vincite si potrebbe risolvere un sottogioco ristretto ai giocatori di ciascuna coalizione, oppure suddividere in parti uguali la vincita, trascurando il contributo dei singoli giocatori
Altri metodi più complessi tengono conto del ruolo svolto da ciascun giocatore

**Definizione 2.1** *Dato un gioco $G = (N, v)$ si dice imputazione o ripartizione del valore del gioco o soluzione del gioco un vettore $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tale che:*

$$\begin{array}{ll} \sum_{i \in N} x_i = v(N) & \textit{ipotesi di efficienza} \\ x_i \geq v(i); i = 1, \ldots, n & \textit{ipotesi di forza dei giocatori o razionalità individuale} \end{array}$$

*Nel caso di un cost game la razionalità individuale richiede $x_i \leq c(i)$*

L'insieme di tutte le imputazioni si indica con $E(v)$

**Definizione 2.2** *Se per un gioco* $G = (N, v)$ *si ha:*

$$\sum_{i \in N} v(i) = v(N)$$

*allora* $E(v)$ *ha come unico elemento* $x = (v(1), v(2), \ldots, v(n))$*; in questo caso il gioco è detto inessenziale e essenziale altrimenti*

La razionalità individuale costituisce una condizione per ogni concetto di soluzione
Se il gioco è essenziale esistono più imputazioni possibili e si ripropone il problema di scegliere la "soluzione": se due imputazioni $x$ e $y$ sono distinte esiste almeno un giocatore $k$ per cui $x_k > y_k$ e almeno un giocatore $h$ per cui $x_h < y_h$

### 2.2 Nucleo

E' probabilmente il concetto di soluzione insiemistico più interessante per numerose classi di giochi; è stato introdotto da Gillies (1953 e 1959)

$$x(S) \geq v(S) \;\; S \subset N \qquad \text{ipotesi di razionalità della coalizione}$$

**Definizione 2.3** *Si dice nucleo di un gioco, o core, l'insieme:*

$$C(v) = \{x \in E(v) | x(S) \geq v(S), \forall\; S \subset N\}$$

*Nel caso di un cost game* $c$ *la razionalità della coalizione richiede* $x(S) \leq c(S), \forall\; S \subset N$

- Il nucleo può essere vuoto come nel gioco di maggioranza semplice e in generale nei giochi essenziali a somma costante

- Il nucleo ha un aspetto normativo (quali soluzioni non bisogna scegliere). Se il nucleo è vuoto non si può concludere che la grande coalizione non si forma, ma solo che è instabile

**Esempio 2.1 (Nucleo del gioco dei guanti)** *Riferendosi all'Esempio 1.4, il nucleo è:*

$$C(v) = \{(\alpha, \alpha, 1-\alpha, 1-\alpha) s.t. 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

*In generale se* $L = \{1, ..., n_l\}$ *e* $R = \{1, ..., n_r\}$ *si ha:*
*se* $n_l = n_r$*:*

$$C(v) = \{(\alpha, ..., \alpha, 1-\alpha, ..., 1-\alpha) s.t. 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

*se* $n_l < n_r$*:*

$$C(v) = \{(\underbrace{1, ..., 1}_{1,...,n_l}, \underbrace{0, ..., 0}_{1,...,n_r})\}$$

*se* $n_l > n_r$*:*

$$C(v) = \{(\underbrace{0, ..., 0}_{1,...,n_l}, \underbrace{1, ..., 1}_{1,...,n_r})\}$$

*Il nucleo evidenzia il comportamento del mercato quando uno tra due beni complementari è carente* $\diamondsuit$

#### 2.2.1 Bilanciamento

Per stabilire se un gioco ha nucleo vuoto o meno, la coesività o la superadditività non danno informazioni precise; ad esempio il gioco di maggioranza semplice ha nucleo vuoto ma è superadditivo e quindi anche coesivo
Un gioco può non essere superadditivo, ma avere nucleo non vuoto

**Esempio 2.2 (Gioco non superadditivo a nucleo non vuoto)** *Si consideri il gioco TU:*

$$\begin{aligned} &N = \{1, 2, 3\} \\ &v(S) = 1 \qquad se\ S \neq N \\ &v(N) = 3 \end{aligned}$$

*Il gioco non è superadditivo poichè* $v(1) + v(2) = 2$ *e* $v(12) = 1$ *ma ha nucleo non vuoto in quanto* $x = (1, 1, 1) \in C(v)$ $\diamondsuit$

Se un gioco non è coesivo ha nucleo vuoto, in quanto esisterebbero una allocazione $x$ e una partizione $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ per cui:

$$x(N) = v(N) < \sum_{i=1,\ldots,k} v(S_i) \leq \sum_{i=1,\ldots,k} x(S_i) = x(N)$$

Le imputazioni del nucleo possono essere caratterizzate come le soluzioni del problema lineare:

$$\begin{aligned} min \;\; & z = \sum_{i \in N} x_i \\ s.t. \;\; & \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \qquad \forall S \subseteq N \end{aligned}$$

per le quali $z^* = v(N)$

Il duale del problema è:

$$\begin{aligned} max \;\; & w = \sum_{S \subseteq N} y_s v(S) \\ s.t. \;\; & \sum_{S \ni i} y_S = 1 \qquad && \forall i \in N \\ & y_S \geq 0 && \forall S \subseteq N \end{aligned}$$

per le quali $w^* = v(N)$

**Teorema 2.1** *Un gioco $v$ ha nucleo non vuoto se e solo se esiste una soluzione del problema primale con $z^* = v(N)$ o equivalentemente (per il primo teorema della dualità) esiste una soluzione del problema duale con $w^* = v(N)$*

L'utilità di questo teorema è molto limitata in quanto la difficoltà di verificare una delle tre condizioni è equivalente

## Definizione 2.4

- *Una collezione* $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ *di sottoinsiemi di* $N$ *è detta bilanciata se esistono* $m$ *numeri non negativi* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *detti coefficienti di bilanciamento, tali che:*

$$\sum_{S_j \ni i} y_j = 1 \qquad \forall i \in N$$

- *Una collezione bilanciata è detta minimale se nessuna sottocollezione è bilanciata*

- *Un gioco è detto bilanciato se per ogni collezione bilanciata minimale* $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ *con coefficienti di bilanciamento* $y_1, y_2, \ldots, y_m$*, si ha:*

$$\sum_{j=1,\ldots,m} y_j v(S_j) \leq v(N)$$

## Proprietà

- Ogni collezione bilanciata è unione di collezioni bilanciate minimali

- Una collezione bilanciata è minimale se e solo se i coefficienti di bilanciamento sono unici

- Le collezioni bilanciate non dipendono dalla funzione caratteristica, ma solo da $N$

## Esempio 2.3 (Collezioni bilanciate I)

1. *Ogni partizione di $N$ è una collezione bilanciata, con coefficienti unitari.*

2. *Sia $N = \{1,2,3\}$; $\mathcal{B} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$ è una collezione bilanciata con coefficienti $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. In generale per ogni $N$ la collezione di $\binom{n}{s}$ sottoinsiemi distinti di $s$ elementi è bilanciata con coefficienti $\begin{pmatrix} n-1 \\ s-1 \end{pmatrix}^{-1}$.*

$\diamondsuit$

**Teorema 2.2 (Bondareva, 1963 - Shapley, 1967)** *Un gioco $G = (N,v)$ ha nucleo non vuoto se e solo se è bilanciato*

- Il teorema di Bondareva-Shapley considera un sistema lineare generato da un sottoinsieme dei vincoli del problema duale associato al nucleo
- Per un gioco superadditivo il teorema di Bondareva-Shapley è vero per le partizioni di $N$, quindi è sufficiente verificarlo per le altre collezioni bilanciate minimali
- Il teorema è particolarmente utile per dimostrare che un gioco ha nucleo vuoto in quanto è sufficiente trovare una collezione bilanciata che non verifica la condizione
- Un gioco a nucleo non vuoto viene anche detto bilanciato

## Esempio 2.4 (Collezioni bilanciate II)

1. *Un gioco a tre giocatori superadditivo è bilanciato se e solo se* $v(12) + v(13) + v(23) \leq 2\ v(123)$ *poichè* $\mathcal{B} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$ *è l'unica collezione bilanciata minimale con coefficienti* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

2. *Sia dato il gioco:*

$$
\begin{aligned}
&N = \{1,2,3,4\} \\
&v(1) = v(2) = v(3) = v(4) = v(14) = v(24) = 0; v(23) = v(34) = 2 \\
&v(12) = v(13) = v(123) = 3; v(124) = 4; v(134) = v(234) = 5; v(N) = 6
\end{aligned}
$$

   *Il gioco non è bilanciato in quanto* $\mathcal{B} = \{\{1,2\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$ *è una collezione bilanciata con coefficienti* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *per la quale si ha:*

$$\frac{1}{2}v(12) + \frac{1}{2}v(134) + \frac{1}{2}v(234) = \frac{13}{2} > 6 = v(N)$$

$\diamondsuit$

## 2.3 Esempi di giochi e nucleo

### 2.3.1 Bankruptcy game

Allocazione di una risorsa insufficiente

$$\mathcal{B} = (N, c, E) = (E; c_1, ..., c_n)$$

| | | |
|---|---|---|
| dove | $N = \{1, ..., n\}$ | insieme dei creditori |
| | $c = \{c_1, ..., c_n\}$ | vettore delle richieste |
| | $E$ | capitale, con $E < \sum_{i \in N} c_i = C$ |

Ogni ripartizione ammissibile ("razionale") del capitale, $x = \{x_1, ..., x_n\}$ deve soddisfare:

$$\sum_{i \in N} x_i = E$$
$$0 \leq x_i \leq c_i, \qquad i \in N$$

## Soluzioni

- $PROP$ - Le quote assegnate sono proporzionali alle richieste di ciascuno:

$$PROP_i = \frac{c_i}{C} E \qquad i \in N$$

- $CEA$ - Le quote assegnate sono uguali per tutti, col vincolo di non superare le richieste di ciascuno:

$$CEA_i = \min(\alpha, c_i) \qquad i \in N$$

  dove $\alpha$ è l'unico valore reale positivo per cui $\sum_{i \in N} CEA_i = E$

- $CEL$ - Le quote assegnate sono uguali alle richieste di ciascuno diminuite di una quantità uguale per tutti, col vincolo di non assegnare quote negative:

$$CEL_i = \max(c_i - \beta, 0) \qquad i \in N$$

  dove $\beta$ è l'unico valore reale positivo per cui $\sum_{i \in N} CEL_i = E$

**Esempio 2.5 (Soluzioni)** *Si consideri il problema di bancarotta* $(15; 3, 6, 7, 14)$.

*PROP* $= (1.5, 3, 3.5, 7)$

*CEA* $= (3, 4, 4, 4)$

*CEL* $= (0, 2, 3, 10)$ $\diamondsuit$

$PROP$ è la soluzione più intuitiva

$CEA$ è quella che più protegge i piccoli creditori

$CEL$ è quella più favorevole ai grossi creditori

Si possono definire due giochi TU, uno pessimistico, $(N, v_P)$, e uno ottimistico, $(N, v_O)$, con:

$$v_P(S) = max\left(0, E - \sum_{i \in N \setminus S} c_i\right) \qquad S \subseteq N$$

$$v_O(S) = min\left(E, \sum_{i \in S} c_i\right) \qquad S \subseteq N$$

**Esempio 2.6 (Inconsistenza del gioco ottimistico)** *Si consideri il problema di bancarotta* $(5; 3, 4)$. *I due giochi sono definiti rispettivamente da:*

$$v_O(1) = 3; v_O(2) = 4; v_O(12) = 5$$
$$v_P(1) = 1; v_P(2) = 2; v_P(12) = 5$$

*per cui il gioco ottimistico dice che i due giocatori separatamente possono ottenere rispettivamente* $3$ *e* $4$, *mentre il capitale è solo* $5$ $\diamondsuit$

Il nucleo del gioco pessimistico coincide con l'insieme delle soluzioni ammissibili del problema di bancarotta:

$$x \in core(v_P) \iff \begin{cases} \displaystyle\sum_{i \in N} x_i = E \\ 0 \leq x_i \leq c_i, \qquad i \in N \end{cases}$$

"$\Rightarrow$" La prima è la condizione di efficienza

Per la seconda condizione per ogni $i \in N$ si ha $x_i \geq v_P(i) \geq 0$ e $E - x_i = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j \geq v_P(N \setminus \{i\}) \geq E - c_i \Rightarrow x_i \leq c_i$

"$\Leftarrow$" La condizione di efficienza è ovviamente soddisfatta

Per ogni $S \subset N$ si hanno due casi:

1) se $v_P(S) = 0 \leq \sum_{i \in S} x_i$

2) se $v_P(S) = E - \sum_{i \in N \setminus S} c_i \leq E - \sum_{i \in N \setminus S} x_i = \sum_{i \in S} x_i$

### 2.3.2 Weighted majority game

Problema di maggioranza pesata

$$\mathcal{W} = (N, w, q) = (q; w_1, ..., w_n)$$

| | | |
|---|---|---|
| dove | $N = \{1, ..., n\}$ | insieme dei consiglieri |
| | $w = \{w_1, ..., w_n\}$ | vettore dei "pesi" |
| | $q$ | quota di maggioranza, con $q < \sum_{i \in N} w_i$ |

E' possibile associare al problema il gioco TU semplice 0-1 $(N, v)$ con:

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sum_{i \in S} w_i > q \ \ S \text{ vincente} \\ 0 & \text{se } \sum_{i \in S} w_i \leq q \ \ S \text{ perdente} \end{cases}$$

Il gioco risulta monotono e se $q \geq \dfrac{1}{2} \sum_{i \in N} w_i$ allora se $S$ è vincente $N \setminus S$ è perdente

Questi giochi sono più utilizzati nei consigli di amministrazione che in politica

**Esempio 2.7 (Consiglio di sicurezza dell'ONU)** *Il Consiglio di sicurezza dell'ONU è composto da cinque membri permanenti con diritto di veto e dieci membri eletti. Un provvedimento è approvato se riceve almeno 9 voti e nessun veto. Questo problema può essere rappresentato come un problema di maggioranza pesata in cui* $w_i = 1$ *se* $i$ *è un membro eletto e* $w_i = 7$ *se* $i$ *è un membro permanente e* $q = 38$ ◊

Un giocatore $i$ è detto di veto se $v(S) = 0$ se $i \notin S$

Detto $V$ l'insieme dei giocatori di veto e data una allocazione $x$ tale che $\sum_{i \in N} x_i = 1, x_i \geq 0, i \in N$ si ha:

$$x \in core(v) \iff \sum_{i \in V} x_i = 1$$

"$\Rightarrow$" E' sufficiente verificare che $x_i = 0, i \in N \setminus V$

$i \in N \setminus V \Rightarrow v(N \setminus \{i\}) = 1$ (altrimenti $i$ sarebbe di veto) per cui $\sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j = 1 \Rightarrow x_i = 0$

"$\Leftarrow$" Per ogni $S \subset N$ si hanno due casi:

1) $v(S) = 0 \leq \sum_{i \in S} x_i$

2) $v(S) = 1 \Rightarrow V \subseteq S \Rightarrow \sum_{i \in S} x_i \geq \sum_{i \in V} x_i = 1$

- Se il giocatore $i$ è di veto non è vero che $i \in S \Rightarrow v(S) = 1$

#### 2.3.3 Assignment game

Problema di assegnazione

$$\mathcal{A} = (N^v, N^c, A, B)$$

| | | |
|---|---|---|
| dove | $N^v = \{1, ..., n^v\}$ | insieme dei venditori |
| | $N^c = \{1, ..., n^c\}$ | insieme dei compratori |
| | $A$ | vettore; $a_j$ = valutazione che $j \in N^v$ da al proprio oggetto |
| | $B$ | matrice; $b_{ij}$ = valutazione che $i \in N^c$ da all'oggetto di $j \in N^v$ |

- Gli oggetti non hanno un prezzo di mercato
- Ciascun venditore possiede un solo oggetto
- Ciascun compratore può acquistare un solo oggetto

E' possibile associare al problema il gioco TU semplice $(N, v)$ con:

$$N = N^v \cup N^c$$

e $v$ è definita nel modo seguente:

- Se $i^* \in N^c$ e $j^* \in N^v$:

$$v(i^*j^*) = c_{i^*j^*} = \begin{cases} b_{i^*j^*} - a_{j^*} & \text{se } b_{i^*j^*} - a_{j^*} \geq 0 \\ 0 & \text{se } b_{i^*j^*} - a_{j^*} < 0 \end{cases}$$

- Se $S$ contiene più compratori che venditori, detto $i(j) \in S \cap N^c$ il compratore dell'oggetto offerto da $j \in S \cap N^v$:

$$v(S) = max \sum_{j \in S \cap N^v} c_{i(j),j}$$

- Se $S$ contiene più venditori che compratori, detto $j(i) \in S \cap N^v$ il venditore dell'oggetto acquistato da $i \in S \cap N^c$:

$$v(S) = max \sum_{i \in S \cap N^c} c_{i,j(i)}$$

**Esempio 2.8 (Gioco di assegnazione)** *Ci sono tre giocatori, 1 (venditore, $a_1 = 10$), 2 e 3 (compratori, $b_{21} = 12, b_{31} = 15$)*

$$v(1) = v(2) = v(3) = v(23) = 0; v(12) = 2; v(13) = v(N) = 5$$

$$core(v) = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1 = \alpha, x_2 = 0, x_3 = 5 - \alpha, 2 \leq \alpha \leq 5\}$$

*L'oggetto non viene venduto a 2 e il payoff di 1 e 3 dipende da come si accordano, ma l'utilità di 1 è almeno $2$ unità. In altre parole il prezzo di vendita è almeno 12 (1 può accordarsi con 2), ma non più di 15 (3 si ritira)*
*Se $\bar{b}_{21} = 15$ allora $core(v) = \{(5, 0, 0)\}$ cioè il prezzo di vendita è 15 (legge della domanda e dell'offerta)* $\diamondsuit$

- Considerazioni economiche

  1. La legge dell'equilibrio tra domanda e offerta dice che il prezzo deve far síche la domanda sia uguale all'offerta, per cui se il prezzo dell'oggetto fosse inferiore a 12 vi sarebbero due acquirenti mentre se il prezzo fosse superiore a 15 non vi sarebbero acquirenti
  2. Le leggi economiche non escludono, come il nucleo, un'utilità positiva per il giocatore 2; infatti il giocatore 1 potrebbe offrire al giocatore 2 parte della sua utilità in cambio di un'offerta maggiore per far sí che il prezzo pagato dal giocatore 3 sia più alto oppure il giocatore 3 potrebbe offrire al giocatore 2 parte della sua utilità in cambio del suo ritiro per far sí che il prezzo pagato al giocatore 1 sia più basso

# 3 Soluzioni puntuali di un gioco TU

Prendono frequentemente il nome di *indici di potere* o *valori* perchè permettono di identificare il "potere" di ciascun giocatore all'interno del gioco
Il termine "indice di potere" si usa per i giochi semplici, mentre per un gioco qualsiasi si preferisce il termine "valore"

## 3.1 Valore di Shapley (1953)

Si basa sul *contributo marginale* di ogni giocatore

**Definizione 3.1** *Si chiama valore di Shapley il vettore $\phi(v)$ la cui componente $\phi_i$ è il contributo marginale medio del giocatore $i$ rispetto alle possibili permutazioni dei giocatori, cioè:*

$$\phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} [v(P(\pi, i) \cup \{i\}) - v(P(\pi, i))]$$

*dove $n = |N|$, $\pi$ è una permutazione di $N$ e $P(\pi, i)$ è l'insieme dei giocatori che precedono $i$ nella permutazione $\pi$*

Il valore di Shapley per un gioco cooperativo esiste ed è unico

Se il gioco è superadditivo (subadditivo per un cost game) il valore di Shapley è un'imputazione:

$$\begin{aligned} &\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N) \\ &\phi_i(v) \geq v(i) \qquad\qquad \forall i \in N \end{aligned}$$

ma non è necessariamente un elemento del nucleo

Se il gioco è convesso (concavo per un cost game) il valore di Shapley è un elemento del nucleo

**Esempio 3.1 (Gioco di assegnazione)** *Riferendosi all'Esempio 2.8, dove* $v(1) = v(2) = v(3) = v(23) = 0; v(12) = 2; v(13) = v(123) = 5$ *il valore di Shapley value è dato da:*

| | *Contributi marginali* | | |
|---|---|---|---|
| *Permutazioni* | *Giocatore 1* | *Giocatore 2* | *Giocatore 3* |
| 1 2 3 | $v(1) - v(\emptyset) = 0$ | $v(12) - v(1) = 2$ | $v(123) - v(12) = 3$ |
| 1 3 2 | $v(1) - v(\emptyset) = 0$ | $v(123) - v(13) = 0$ | $v(13) - v(1) = 5$ |
| 2 1 3 | $v(12) - v(2) = 2$ | $v(2) - v(\emptyset) = 0$ | $v(123) - v(12) = 3$ |
| 2 3 1 | $v(123) - v(23) = 5$ | $v(2) - v(\emptyset) = 0$ | $v(23) - v(2) = 0$ |
| 3 1 2 | $v(13) - v(3) = 5$ | $v(123) - v(13) = 0$ | $v(3) - v(\emptyset) = 0$ |
| 3 2 1 | $v(123) - v(23) = 5$ | $v(23) - v(3) = 0$ | $v(3) - v(\emptyset) = 0$ |
| $\phi_i$ | $\frac{17}{6}$ | $\frac{2}{6}$ | $\frac{11}{6}$ |

*Il valore di Shapley riflette il valore economico del giocatore 2.* $\diamondsuit$

### 3.1.1 Assiomi di Shapley

$\phi$ è l'unico vettore efficiente che soddisfa i seguenti assiomi:

1. Simmetria
   Se due giocatori $i, j$ sono simmetrici, cioè vale la proprietà $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}), \forall\ S \subseteq N \setminus \{i, j\}$ allora $\phi_i(v) = \phi_j(v)$

2. Dummy player
   Sia $i$ un giocatore fittizio, cioè che ad ogni coalizione aggiunge solo il suo valore $v(i)$:
   $$v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(i) \quad \forall\ S \subseteq N \setminus \{i\}$$
   Il valore di Shapley del giocatore $i$ è il suo valore, cioè $\phi_i(v) = v(i)$

3. Additività o indipendenza (assioma controverso)
   Dati due giochi $u$ e $v$, sia $(u + v)$ il gioco somma definito da:
   $$(u + v)(S) = u(S) + v(S), \quad \forall\ S \subseteq N$$
   Il valore di Shapley del gioco somma è dato dalla somma dei valori di Shapley, cioè $\phi_i(u+v) = \phi_i(u) + \phi_i(v), \forall\ i \in N$

**Esempio 3.2 (Giocatori simmetrici e giocatore fittizio)** *Sia dato il gioco* $G = (N, v)$ *dove:*

$$N = \{1, 2, 3\}$$
$$v(1) = v(2) = v(3) = 1; v(12) = 4; v(13) = v(23) = 2; v(N) = 5$$

*I giocatori 1 e 2 sono simmetrici e il giocatore 3 è fittizio, allora* $\phi_3(v) = v(3) = 1$ *e* $\phi_1(v) = \phi_2(v) = \frac{1}{2}(v(N) - v(3)) = 2$ *e quindi* $\phi(v) = (2, 2, 1)$ $\diamondsuit$

- L'assioma di simmetria può essere sostituito dall'assioma di *anonimato*:
  Dato un gioco $v$ e una permutazione dei giocatori $\pi$ sia $u$ il gioco definito da:
  $$u(\pi(S)) = v(S) \quad \forall\ S \subseteq N$$
  Il valore di Shapley del gioco ottenuto permutando i giocatori è dato dalla permutazione dei valori di Shapley, cioè $\phi_{\pi(i)}(u) = \phi_i(v)$
- L'assioma di dummy player può essere sostituito dall'assioma di *null player*:
  Un giocatore $i \in N$ è un null player se $v(S \cup \{i\}) = v(S), \forall\ S \subseteq N \setminus \{i\}$; allora $\phi_i(v) = 0$
  $v(i) = v(\emptyset \cup \{i\}) = v(\emptyset) = 0$ e quindi ancora $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(i), \forall\ S \subseteq N \setminus \{i\}$

#### 3.1.2 Calcolo del valore di Shapley

Il valore di Shapley risulta molto complesso da calcolare

Definizione

E' necessario determinare i contributi marginali dei giocatori nelle $n!$ possibili coalizioni ordinate
Con 10 giocatori, per ogni giocatore ci sono $10! = 3.628.800$ permutazioni

Semplificazione

Considerare le possibili $2^n - 1$ coalizioni non vuote e per ciascuna considerare ogni giocatore come l'ultimo arrivato e quindi "pesare" il suo contributo marginale con le permutazioni degli altri giocatori della coalizione e dei giocatori non facenti parte della coalizione:

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}[v(S) - v(S \setminus \{i\})]$$

Con 10 giocatori ci sono $2^{10} - 1 = 1.023$ coalizioni

Formule "ad hoc"

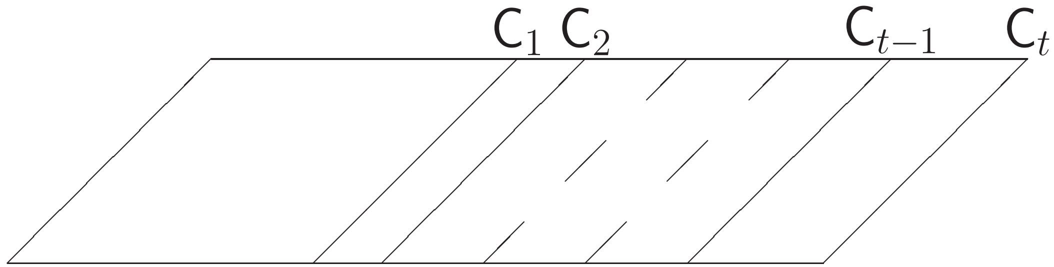
Sfruttare le caratteristiche di alcune classi di giochi

## Gioco dell'aeroporto (Airport game - Littlechild e Thompson, 1977)

Ripartire il costo di costruzione e manutenzione della pista tra differenti tipi di aerei

Gli aerei sono raggruppati in $t$ sottoinsiemi disgiunti $N_1, \ldots, N_t$

Gli aerei di $N_i$ richiedono una pista di costo $C_i$ con $C_i < C_{i+1}$




Si definisce il gioco:

$$v(S) = C_{j(S)}$$

dove $j(S) = max\ \{i|S \cap N_i \neq \emptyset\}$

Il valore di Shapley di ogni aereo corrisponde alla seguente ripartizione dei costi:

- Il costo del primo tratto di pista $C_1$ è diviso tra tutti gli aerei, poichè tutti lo utilizzano;
- Il costo del secondo tratto di pista $C_2 - C_1$ è diviso tra gli aerei dei sottoinsiemi $N_2, \ldots, N_t$ che sono quelli che lo utilizzano;
- Il costo dell'ultimo tratto di pista $C_t - C_{t-1}$ che è diviso tra gli aerei del sottoinsieme $N_t$ che sono gli unici che lo utilizzano.

Questo criterio è facilmente applicabile anche nel caso di molti aerei

**Esempio 3.3 (Gioco dell'aeroporto)**

$$\begin{aligned}
&N_1 = \{1,2,3\}; N_2 = \{4,5,6,7\}; N_3 = \{8,9,10\} \\
&C_1 = 20; C_2 = 27; C_3 = 33 \\
&\phi_1 = \tfrac{20}{10} = 2 \\
&\phi_2 = \tfrac{20}{10} + \tfrac{27-20}{7} = 3 \\
&\phi_3 = \tfrac{20}{10} + \tfrac{27-20}{7} + \tfrac{33-27}{3} = 5
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

La verifica utilizza gli assiomi di Shapley (Littlechild e Owen, 1973)
Si definiscono $t$ giochi $v_1, \ldots, v_t$ con il gioco $v_i$ relativo al tratto di pista $i$:

$$v_i(S) = \begin{cases} C_i - C_{i-1} & se\ i \leq j(S) \\ 0 & se\ i > j(S) \end{cases}$$

dove $C_0 = 0$
A questo punto si osserva che:

1. gli aerei di $N_1, \ldots, N_{i-1}$ sono dummy per il gioco $v_i$
2. gli aerei di $N_i, \ldots, N_t$ sono simmetrici per il gioco $v_i$
3. $v$ è dato dalla somma dei giochi $v_i$

### 3.1.3 Un'applicazione del valore di Shapley

**Esempio 3.4 (Consiglio dell'UE 1958-1973)** *Il valore di Shapley permette di evidenziare un difetto nei pesi assegnati nel Consiglio dell'UE del 1958*
*quota (1958) = 12; quota (1973) = 41*

| | 1958 | | | 1973 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Paesi | Peso | % | Shapley | Peso | % | Shapley |
| Francia | 4 | 23.53 | 0.233 | 10 | 17.24 | 0.179 |
| Germania | 4 | 23.53 | 0.233 | 10 | 17.24 | 0.179 |
| Italia | 4 | 23.53 | 0.233 | 10 | 17.24 | 0.179 |
| Belgio | 2 | 11.76 | 0.150 | 5 | 8.62 | 0.081 |
| Paesi Bassi | 2 | 11.76 | 0.150 | 5 | 8.62 | 0.081 |
| Lussemburgo | 1 | 5.88 | 0.000 | 2 | 3.45 | 0.010 |
| Regno Unito | - | - | - | 10 | 17.24 | 0.179 |
| Danimarca | - | - | - | 3 | 5.17 | 0.057 |
| Irlanda | - | - | - | 3 | 5.17 | 0.057 |
| Totale | 17 | 100.00 | 1.000 | 58 | 100.00 | 1.000 |

◊

### 3.2 Nucleolo (Schmeidler, 1969)

Si basa sull'idea di minimizzare il massimo "malcontento"

**Definizione 3.2** *Dato un gioco $v$, sia $S$ una coalizione e $x$ una possibile ripartizione del valore del gioco; si dice rimpianto o eccesso di $S$ rispetto ad $x$ la quantità:*

$$e(S, x) = v(S) - x(S)$$

*Nel caso di un cost game il rimpianto è $x(S) - c(S)$*

- Nella definizione precedente $x$ è una ripartizione del valore del gioco in quanto deve soddisfare solo l'ipotesi di efficienza; in questo caso talvolta si usano i termini preimputazione e prenucleolo per indicare che non si tiene conto della razionalità individuale

E' possibile definire il vettore $\vartheta(x) \in \mathbb{R}^{2^n}$:

$$\vartheta_1(x) = max\ \{e(S, x) | S \subset N\} = e(S_1, x)$$
$$\vartheta_i(x) = max\ \{e(S, x) | S \subset N, S \neq S_j, j = 1, \ldots, i-1\} = e(S_i, x) \qquad i = 2, \ldots, 2^n$$

Le componenti di $\vartheta(x)$ sono i rimpianti generati da $x$ al variare di $S$, in ordine debolmente decrescente

**Esempio 3.5 (Vettore degli eccessi)** *Sia dato il gioco:*

$$N = \{1, 2, 3\}$$
$$v(1) = v(2) = v(3) = 0; v(12) = 2; v(13) = v(23) = 3; v(N) = 5$$

*Data la ripartizione* $x = (3, 1, 1)$ *si ha:*

$$e(1, x) = -3; e(2, x) = -1; e(3, x) = -1; e(12, x) = -2; e(13, x) = -1; e(23, x) = 1; e(N, x) = 0$$

*e quindi:*

$$\vartheta(x) = (1, 0, -1, -1, -1, -2, -3)$$

♢

**Definizione 3.3** *Dati due vettori* $x, y \in \mathbb{R}^n$*, si dice che* $x$ *è lessicograficamente minore di* $y$ *e si indica con* $x <_L y$*, se esiste* $i \geq 1$ *per cui:*

$$\begin{array}{ll} x_j = y_j & j < i \\ x_i < y_i & \end{array}$$

**Definizione 3.4** *Dato un gioco* $v$ *si dice nucleolo del gioco il vettore* $\nu(X)$ *che genera il minimo, secondo l'ordine lessicografico, dei vettori* $\vartheta(x)$ *al variare di* $x$ *nell'insieme* $X$ *delle possibili ripartizioni*

- Il nucleolo è un elemento del nucleo se è non vuoto, per cui costituisce un concetto di soluzione per i giochi a nucleo vuoto, ma permette anche di "scegliere" un elemento del nucleo

**Esempio 3.6 (Ordine lessicografico)** *Sia dato il seguente gioco:*

$$N = \{1, 2\}$$
$$v(1) = 1; v(2) = 3; v(12) = 8$$

*Dati* $x = (6, 2)$ *e* $y = (3, 5)$ *si ha:*

$$e(1, x) = -5; e(2, x) = 1; e(12, x) = 0$$
$$e(1, y) = -2; e(2, y) = -2; e(12, y) = 0$$

*e quindi* $\vartheta(x) = (1, 0, -5)$ *e* $\vartheta(y) = (0, -2, -2)$ *per cui* $\vartheta(y) <_L \vartheta(x)$
*Si può verificare che* $y = \nu(X)$ ♢

## Proprietà

Se $X$ è non vuoto, compatto e convesso allora $\nu(X)$ esiste ed è unico

# 4 Allocazione di costi

E' una delle prime applicazioni della Teoria dei Giochi (anni '30 Tennessee Valley Authority)

Ripartizione dei costi di un progetto tra i diversi utenti, tenendo conto del diverso ruolo e dei differenti interessi

Esiste anche il problema corrispondente di allocazione di profitti

- Concetti di soluzione precedentemente esposti
- Concetti di soluzione o metodi dei costi separabili

### 4.1 Metodi dei costi separabili

## Definizione 4.1

- *Dato un gioco di costi o cost game* $c$ *si chiama costo separabile del giocatore* $i$ *il suo contributo marginale o costo marginale:*

$$m_i = c(N) - c(N \setminus \{i\})$$

- *Se la somma dei costi separabili dei giocatori è minore del costo del gioco si chiama costo non separabile del gioco la differenza tra i due valori, cioè:*

$$g(N) = c(N) - \sum_{i \in N} m_i$$

I metodi si differenziano per come viene ripartito il costo non separabile

#### 4.1.1 Equa ripartizione (ECA)

$g(N)$ viene ripartito in parti uguali

$$ECA_i = m_i + \frac{1}{n} g(N)$$

#### 4.1.2 Costi di alternativa risparmiati (ACA)

$g(N)$ viene ripartito proporzionalmente al risparmio ottenuto per aver pagato il proprio costo separabile invece del costo

$$ACA_i = m_i + \frac{r_i}{\sum_{j \in N} r_j} g(N)$$

dove $r_i = c(i) - m_i$

#### 4.1.3 Cost Gap (CGA)

$g(N)$ viene ripartito proporzionalmente al migliore (minimo) massimo contributo che ciascuno è disposto a pagare facendo parte di una coalizione

$$CGA_i = m_i + \frac{g_i}{\sum_{j \in N} g_j} g(N)$$

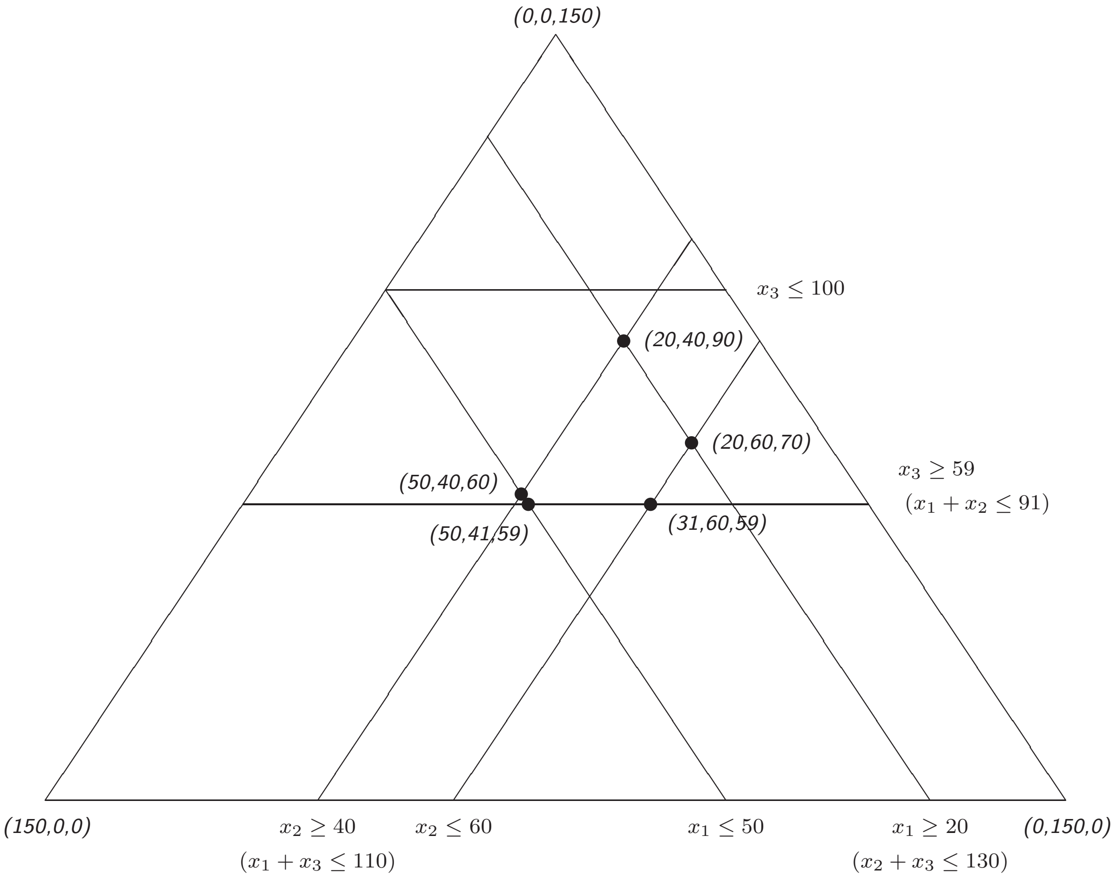
dove $g_i = min\ \{g(S)|i \in S\}$ e $g(S) = c(S) - \sum_{i \in S} m_i$

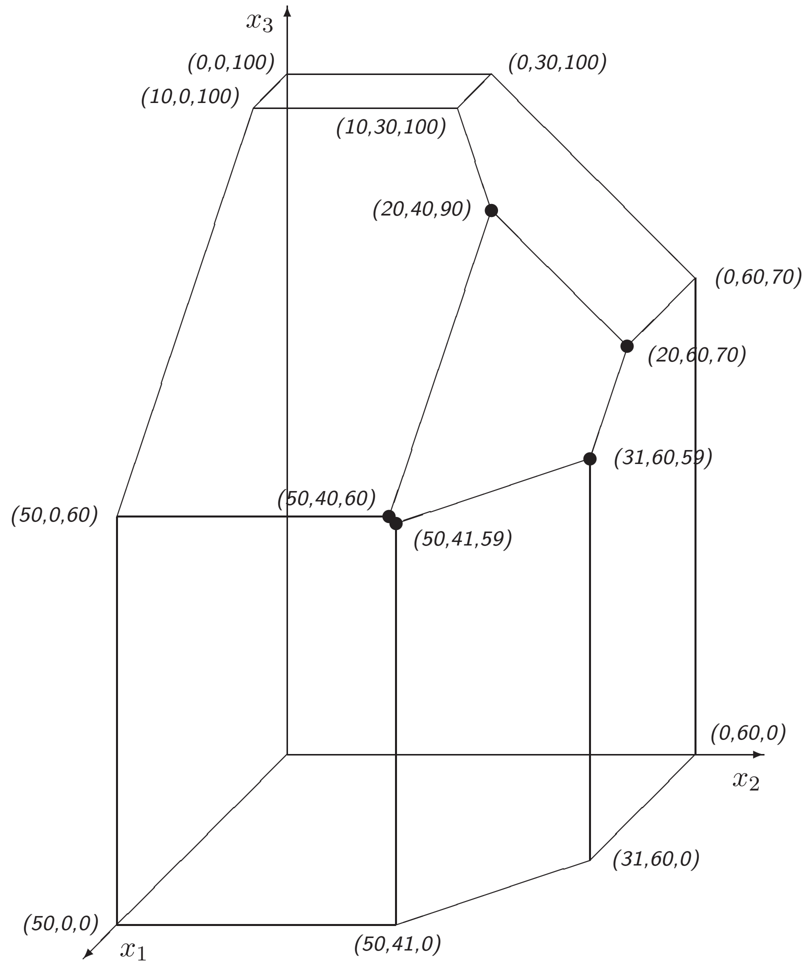
- Esiste un altro concetto di soluzione equivalente al CGA, il valore $\tau$, introdotto da Tijs nel 1981, definito da $\tau = \alpha m + (1-\alpha)M$, dove $m_i = c(N) - c(N \setminus \{i\}), \forall\ i \in N$ (utopia = miglior payoff per ogni singolo giocatore), $M_i = min\ \{c(S) - \sum_{j \in S \setminus \{i\}} m_j | i \in S, S \subseteq N\}, \forall\ i \in N$ (peggior payoff per ogni singolo giocatore) e $\alpha$ è tale che $\sum_{i \in N} \tau_i = c(N)$ che si basa su principi differenti; questo fatto rafforza reciprocamente i due concetti di soluzione.
- Il valore $\tau$ richiede che il gioco sia *quasi-bilanciato*, cioè valgano le seguenti condizioni:
  1 - $m_i \leq M_i, \forall\ i \in N$
  2 - $\sum_{i \in N} m_i \leq c(N) \leq \sum_{i \in N} M_i$
- Per un gioco di profitti il vettore utopia è definito come $M_i = v(N) - v(N \setminus \{i\})$ e il peggior payoff come $m_i = max\ \{v(S) - \sum_{j \in S \setminus \{i\}} M_j | i \in S, S \subseteq N\}, \forall\ i \in N$.

**Esempio 4.1 (Allocazione di costi)** *Sia dato il seguente gioco* $< N, c >$:

$N = \{1, 2, 3\}$

$c(1) = 50; c(2) = 60; c(3) = 100; c(12) = 91; c(13) = 110; c(23) = 130; c(N) = 150$



## Costi separabili

$$m_1 = c(N) - c(N \setminus \{1\}) = 150 - 130 = 20$$
$$m_2 = c(N) - c(N \setminus \{2\}) = 150 - 110 = 40$$
$$m_3 = c(N) - c(N \setminus \{3\}) = 150 - 91 = 59$$

## Costo non separabile

$$g(N) = c(N) - \sum_{i \in N} m_i = 150 - (20 + 40 + 59) = 31$$

## Risparmi

$$r_1 = c(1) - m_1 = 50 - 20 = 30$$
$$r_2 = c(2) - m_2 = 60 - 40 = 20$$
$$r_3 = c(3) - m_3 = 100 - 59 = 41$$

## Costi non separabili delle coalizioni

$$g(1) = c(1) - m_1 = 50 - 20 = 30$$
$$g(2) = c(2) - m_2 = 60 - 40 = 20$$
$$g(3) = c(3) - m_3 = 100 - 59 = 41$$
$$g(12) = c(12) - (m_1 + m_2) = 91 - (20 + 40) = 31$$
$$g(13) = c(13) - (m_1 + m_3) = 110 - (20 + 59) = 31$$
$$g(23) = c(23) - (m_2 + m_3) = 130 - (40 + 59) = 31$$

## Minimi costi non separabili

$$g_1 = min\{g(1), g(12), g(13), g(N)\} = min\{30, 31, 31, 31\} = 30$$
$$g_2 = min\{g(2), g(12), g(23), g(N)\} = min\{20, 31, 31, 31\} = 20$$
$$g_3 = min\{g(3), g(13), g(23), g(N)\} = min\{40, 31, 31, 31\} = 31$$

## ECA

$$x_1 = m_1 + \frac{1}{n}g(N) = 20 + \frac{1}{3}31 = 30.333$$
$$x_2 = m_2 + \frac{1}{n}g(N) = 40 + \frac{1}{3}31 = 50.333$$
$$x_3 = m_3 + \frac{1}{n}g(N) = 59 + \frac{1}{3}31 = 69.333$$

## ACA

$$x_1 = m_1 + \frac{r_1}{r_1+r_2+r_3}g(N) = 20 + \frac{30}{91}31 = 30.220$$
$$x_2 = m_2 + \frac{r_2}{r_1+r_2+r_3}g(N) = 40 + \frac{20}{91}31 = 46.813$$
$$x_3 = m_3 + \frac{r_3}{r_1+r_2+r_3}g(N) = 59 + \frac{41}{91}31 = 72.967$$

## CGA

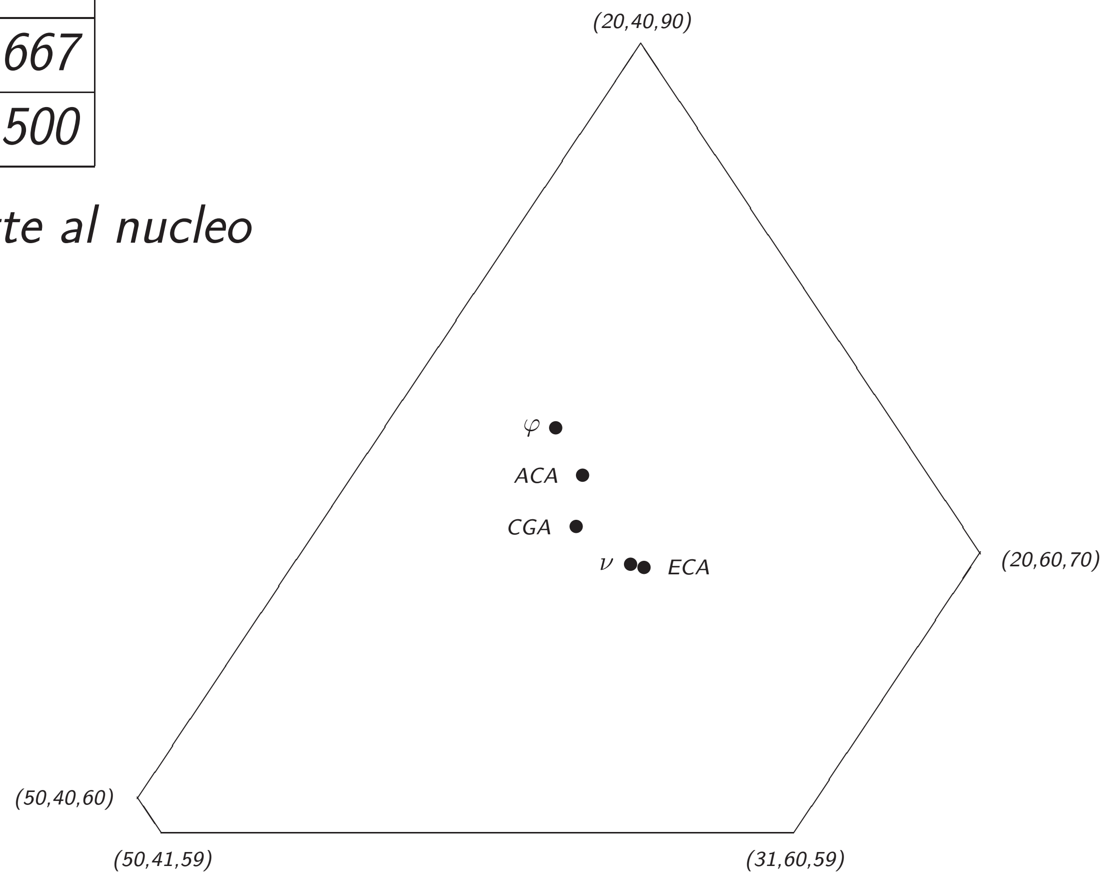
$$x_1 = m_1 + \frac{g_1}{g_1+g_2+g_3}g(N) = 20 + \frac{30}{81}31 = 31.481$$
$$x_2 = m_2 + \frac{g_2}{g_1+g_2+g_3}g(N) = 40 + \frac{20}{81}31 = 47.654$$
$$x_3 = m_3 + \frac{g_3}{g_1+g_2+g_3}g(N) = 59 + \frac{31}{81}31 = 70.864$$

## Valore Shapley

| Permutazioni | Contributi marginali | | |
|---|---|---|---|
| 1 2 3 | 50 | 41 | 59 |
| 1 3 2 | 50 | 40 | 60 |
| 2 1 3 | 31 | 60 | 59 |
| 2 3 1 | 20 | 60 | 70 |
| 3 1 2 | 10 | 40 | 100 |
| 3 2 1 | 20 | 30 | 100 |
| Valore di Shapley | 30.167 | 45.167 | 74.667 |

| | Allocazioni | | |
|---|---|---|---|
| Criterio | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
| ECA | 30.333 | 50.333 | 69.333 |
| ACA | 30.220 | 46.813 | 72.967 |
| CGA | 31.481 | 47.654 | 70.864 |
| Valore di Shapley | 30.167 | 45.167 | 74.667 |
| Nucleolo ($\nu$) | 30.500 | 50.000 | 69.500 |

Le allocazioni proposte appartengono tutte al nucleo




◇