1 Duopolio

1.1 Introduzione

Su un mercato economico le imprese possono assumere vari ruoli

monopolio: un'impresa è in grado di governare completamente il mercato, stabilendo autonomamente quantità da produrre e prezzo di vendita

oligopolio: poche imprese governano il mercato, ma devono ciascuna tenere conto delle altre e della richiesta del mercato stesso

concorrenza: nessuna impresa è in grado di attuare una propria politica, ma subisce le regole del mercato

Il caso dell'oligopolio è certamente quello più interessante dal punto di vista delle *interazioni strategiche* tra le imprese operanti; tra le varie situazioni la più semplice è il *duopolio*, in cui sul mercato operano solo due imprese

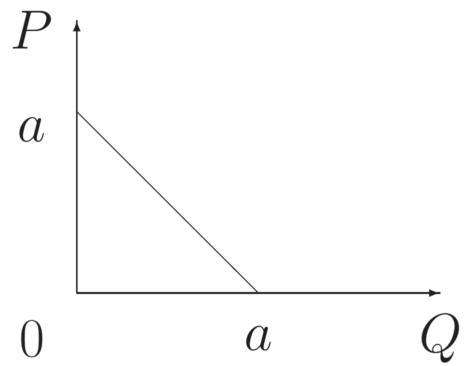
Per rendere la situazione più semplice dal punto di vista computazionale si suppone che le due imprese producano allo stesso costo un *unico bene identico* ed inoltre le funzioni di costo e domanda sono supposte lineari a tratti

1.2 Il modello di Cournot - 1838

Due imprese, 1 e 2, devono decidere simultaneamente la quantità di bene da produrre, q_1 e q_2 rispettivamente, mentre il prezzo è una funzione (solitamente decrescente) della quantità complessiva prodotta e immessa sul mercato
Non ci sono costi fissi e il costo per produrre un'unità di bene è una costante strettamente positiva c, identica per le due imprese

Il prezzo per unità di bene è una funzione decrescente dalla quantità di bene $Q = q_1 + q_2$ che le imprese producono; per semplicità si suppone:

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & se \quad Q \leq a \\ 0 & se \quad Q > a, \end{cases}$$



dove $a > c$ è una costante

Il profitto dell'impresa i è dato da:

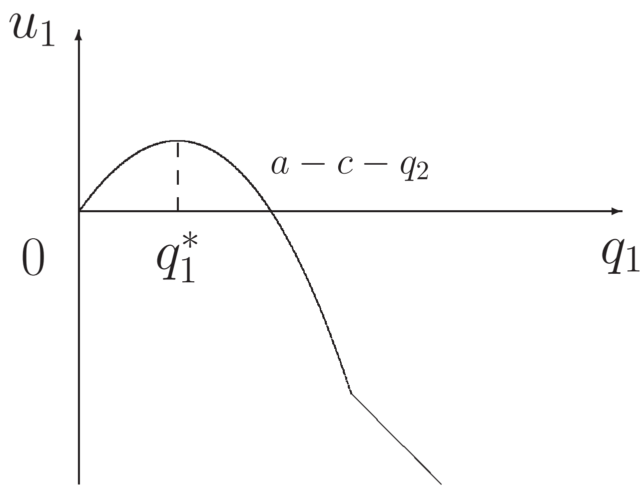
$$u_i(q_1, q_2) = P(Q)q_i - cq_i, \qquad i = 1, 2$$

Il caso $a \leq c$ è banale poichè le imprese sceglierebbero di non produrre

- Affinchè un'impresa realizzi un profitto non negativo è necessario che valga $P(Q) \geq c$, cioè $Q \leq a - c$
- Le quantità presenti in questa trattazione sono talvolta considerate solo come valore, trascurando la dimensione

Se la seconda impresa produce $q_2 \leq a - c$, la prima impresa deciderà di produrre la quantità q_1 che massimizza il suo profitto:

$$u_1(q_1, q_2) = (P(Q) - c)q_1 = \begin{cases} -q_1^2 + (a - c - q_2)q_1 & \text{se } q_1 \leq a - q_2 \\ -cq_1 & \text{se } q_1 > a - q_2. \end{cases}$$



La quantità ottimale per l'impresa 1 è $q_1^* = \dfrac{a - c - q_2}{2}$

Per la simmetria del problema la quantità ottimale per l'impresa 2 è $q_2^* = \dfrac{a-c-q_1}{2}$

Le quantità q_1^* e q_2^* possono essere determinate simultaneamente:

$$\begin{cases} q_1^* = \dfrac{a-c-q_2^*}{2} \\ q_2^* = \dfrac{a-c-q_1^*}{2} \end{cases}$$

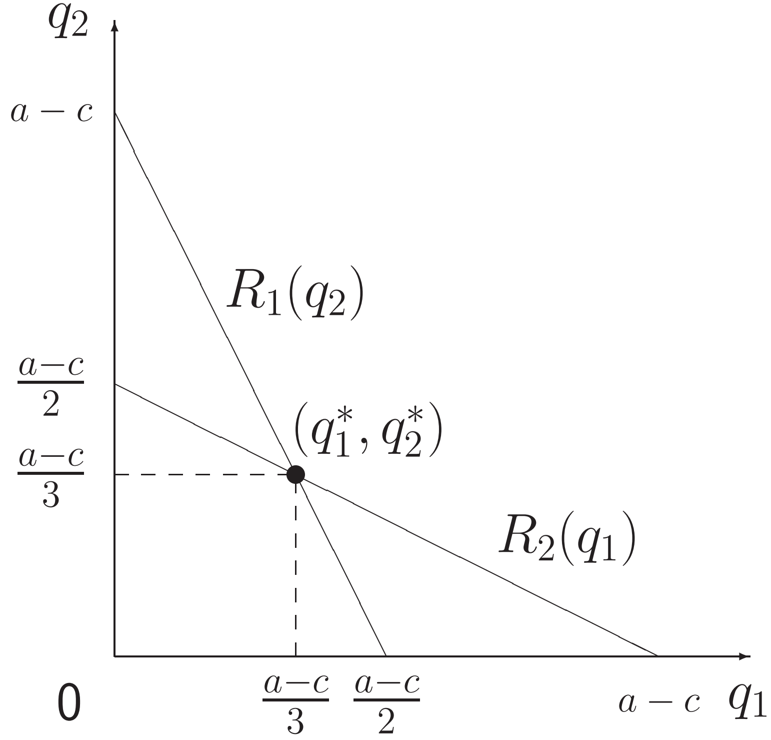
$q_1^* = q_2^* = \dfrac{(a-c)}{3}$

$P^* = \dfrac{(a+2c)}{3}$

$u_1(q_1^*, q_2^*) = u_2(q_1^*, q_2^*) = \dfrac{(a-c)^2}{9}$

Il modello di Cournot può essere interpretato come un gioco in cui i giocatori sono le due imprese, le strategie sono le quantità che ciascuna impresa può produrre e le funzioni di utilità delle imprese coincidono con le funzioni di profitto

In questa situazione q_1^* e q_2^* sono la *miglior risposta di un'impresa alla strategia dell'altra*, cioè costituiscono un equilibrio di Nash detto *equilibrio di Cournot*

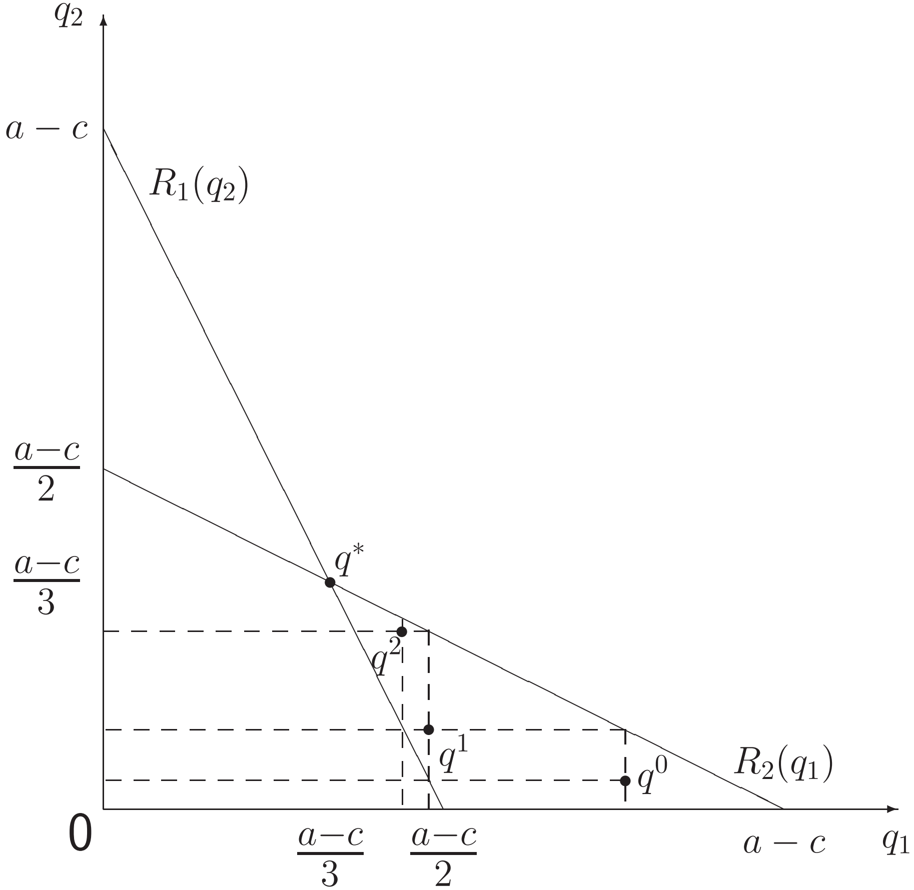


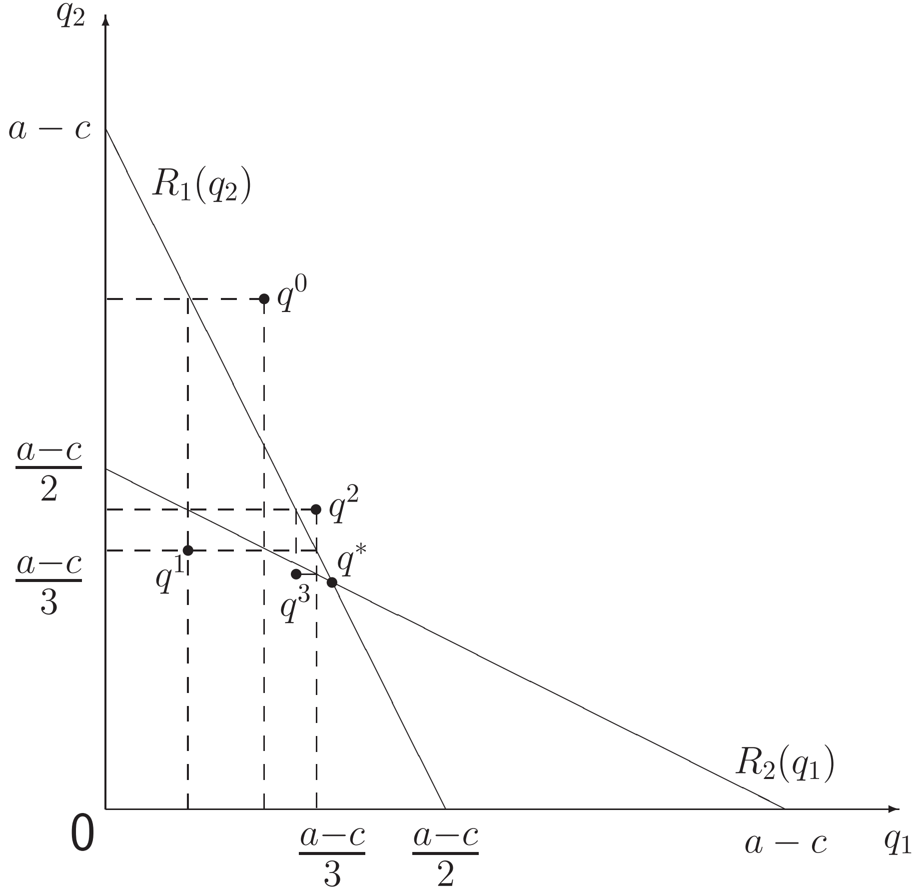
1.3 Soluzione dinamica (Best-reply)

I valori di q_1^* e q_2^* non richiedono un accordo tra le due imprese

Siano q_1^0 e q_2^0 le quantità arbitrarie prodotte al tempo t_0
Al tempo t_1 ciascuna impresa sceglie la miglior risposta alla scelta precedente dell'impresa concorrente, cioè $q_1^1 = \dfrac{a - c - q_2^0}{2}$ e $q_2^1 = \dfrac{a - c - q_1^0}{2}$
In generale al tempo t_n si ha $q_1^n = \dfrac{a - c - q_2^{n-1}}{2}$ e $q_2^n = \dfrac{a - c - q_1^{n-1}}{2}$
Inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} q_1^n = \lim_{n\to+\infty} q_2^n = \frac{(a-c)}{3}$$





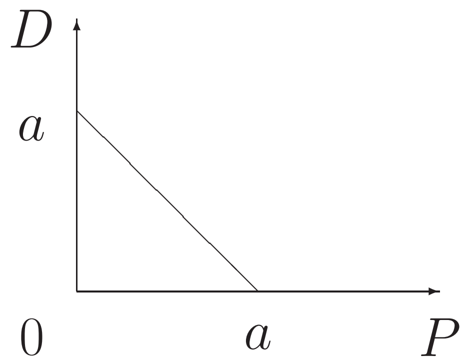
Il risultato può essere ottenuto anche supponendo che ad ogni stadio solo una delle due imprese, alternativamente, ridetermini la sua produzione ottimale sulla base della produzione dell'altra nello stadio precedente

1.4 Il modello di Bertrand - 1883

Le due imprese decidono, indipendentemente e simultaneamente, i prezzi del loro prodotto, mentre la quantità di bene prodotta è tale da soddisfare la domanda che dipende dal prezzo fissato
Come nel modello di Cournot, non esistono costi fissi di produzione e il costo di produzione unitario, uguale per le due imprese, è c

I prodotti delle due imprese sono indistinguibili e il consumatore sceglie solo in base al prezzo
Detti p_1 e p_2 i prezzi scelti e $P = \min\{p_1, p_2\}$, la domanda, in funzione del prezzo è data da

$$D(P) = \begin{cases} a - P & \text{se } 0 \leq P \leq a \\ 0 & \text{se } P > a \end{cases}$$



dove $a > c$ è il prezzo massimo che i consumatori sono disposti a pagare

Se le due imprese scelgono lo stesso prezzo, si dividono il mercato a metà
Altrimenti l'impresa che fissa il prezzo più alto non ha richiesta e quindi non produce e l'altra soddisfa tutta la richiesta del mercato

Le funzioni di utilità per le due imprese sono:

$$u_1(p_1,p_2) = \begin{cases} (p_1-c)(a-p_1)_+ & \text{se } p_1 < p_2 \\ \dfrac{(p_1-c)(a-p_1)_+}{2} & \text{se } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{se } p_1 > p_2 \end{cases}$$

$$u_2(p_1,p_2) = \begin{cases} (p_2-c)(a-p_2)_+ & \text{se } p_2 < p_1 \\ \dfrac{(p_2-c)(a-p_2)_+}{2} & \text{se } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{se } p_2 > p_1 \end{cases}$$

Questa situazione può essere vista come *pura concorrenza*, quindi l'unico prezzo che garantisce il massimo guadagno è $p_1 = p_2 = c$:

- se $p_i < c, i = 1, 2$ l'impresa i produce in perdita
- se $p_i > c, i = 1, 2$, l'altra può conquistare tutto il mercato fissando un prezzo inferiore

- Si potrebbe pensare che il risultato del modello sia assurdo in quanto se $p_1 = p_2 = c$ entrambe le imprese non realizzano alcun profitto. Nella realtà la pura concorrenza non si verifica mai e in ogni caso il valore di c non è il mero costo di produzione, ma tiene conto di tutti i costi connessi, compresa la distribuzione e un guadagno minimo che giustifichi l'esistenza dell'impresa

Anche il modello di Bertrand può essere interpretato come un gioco in cui i giocatori sono le due imprese, le strategie sono i prezzi possibili e le funzioni di utilità sono date dalle funzioni di profitto

E' facile verificare che i prezzi $p_1 = p_2 = c$ costituiscono l'unico equilibrio di Nash detto *equilibrio di Bertrand*

(c, c) è equilibrio di Nash

Se un'impresa fissa il prezzo c, l'altra impresa non ha risposte migliori di c, in quanto se sceglie un prezzo inferiore ottiene un payoff negativo, mentre se ne fissa uno maggiore, ottiene comunque un'utilità nulla

<u>(c, c) è l'unico equilibrio di Nash</u>

Nessun altro punto $(\bar{p}_1, \bar{p}_2) \neq (c, c)$ è di equilibrio, infatti:

- se il minore dei due prezzi è strettamente minore di c, l'impresa che lo ha fissato ottiene un'utilità negativa, e può incrementarla fissando il prezzo c
- se il minore dei due prezzi è maggiore o uguale di c e i prezzi sono diversi, l'impresa che lo ha fissato può incrementare la sua utilità fissando un prezzo leggermente più alto
- se i prezzi sono uguali e strettamente maggiori di c, ciascuna impresa può aumentare la sua utilità riducendo leggermente il prezzo

Questo risultato è noto come *paradosso di Bertrand*

1.5 Il modello di Stackelberg - 1934

Ciascuna impresa deve decidere la quantità da produrre, ma le due imprese agiscono in tempi differenti
L'impresa 1 è dominante (*leader*) e muove per prima
L'impresa 2 è subordinata (*follower*) e muove per seconda

L'impresa leader fissa la sua quantità ottimale q_1^* e l'impresa follower decide la sua quantità ottimale q_2^* sulla base della scelta dell'impresa 1
La quantità $Q = q_1^* + q_2^*$ determina il prezzo

- L'impresa 1, sa di essere dominante e sa anche che l'impresa 2 fisserà la sua produzione q_2^* conoscendo la scelta q_1^*, quindi nel decidere il valore di q_1^* l'impresa leader terrà conto della succesiva scelta dell'impresa follower.

Per semplicità e per poter fare un confronto, la funzione di prezzo sia:

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & se \quad Q \leq a \\ 0 & se \quad Q > a, \end{cases}$$

e il profitto dell'impresa i sia:

$$u_i(q_1, q_2) = P(Q)q_i - cq_i, \qquad i = 1, 2$$

Se l'impresa 1 produce la quantità q_1 la produzione ottimale per l'impresa 2 è:

$$q_2^* = \frac{a-c-q_1}{2}$$

e quindi l'impresa 1 produrrà la quantità:

$$\begin{aligned} q_1^* &= argmax\ u_1(q_1, q_2^*) = argmax\ \left\{ q_1 \left(a - q_1 - \frac{a-c-q_1}{2} \right) - cq_1 \right\} \\ &= argmax\ \left\{ -\frac{1}{2}q_1^2 + \frac{a-c}{2}q_1 \right\} = \frac{a-c}{2} \end{aligned}$$

da cui si ricava:

$$q_2^* = \frac{a-c}{4}$$

$P^* = \dfrac{a+3c}{4}$

$u_1(q_1^*, q_2^*) = \dfrac{(a-c)^2}{8}$; $u_2(q_1^*, q_2^*) = \dfrac{(a-c)^2}{16}$

Anche il modello di Stackelberg può essere interpretato come un gioco in cui i giocatori, le strategie e le funzioni di utilità sono sono le stesse del modello di Cournot
La variante è che il gioco è a informazione perfetta, per cui l'esito si può ricavare con l'induzione a ritroso

Anche in questo caso, la soluzione ottenuta costituisce un equilibrio di Nash detto *equilibrio di Stackelberg*

1.6 Confronto tra i modelli

Per completezza si consideri il caso di monopolio
Utilizzando le stesse funzioni di prezzo e di profitto si ha:

$$Q^* = argmax\ u(Q) = argmax\ \{(a-Q)Q - cQ\} = \frac{a-c}{2}$$

$$P^* = \frac{a+c}{2}$$

$$U(Q^*) = \frac{(a-c)^2}{4}$$

Si può ipotizzare che le due imprese si accordino tra di loro, gestendo la produzione, i prezzi e il mercato come se fossero in regime di monopolio, ad esempio dividendo equamente la produzione e conseguentemente i profitti, in un *monopolio alla Cournot*

$$P^* = \frac{a+c}{2}$$

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a-c}{4}$$

$$u_1(q_1^*, q_2^*) = u_2(q_1^*, q_2^*) = \frac{(a-c)^2}{8}$$

	duopolio di Cournot (i)	monopolio alla Cournot (ii)	duopolio di Stackelberg (iii)	duopolio di Bertrand (iv)
produzione	$\frac{a-c}{3}$ $\frac{a-c}{3}$	$\frac{a-c}{4}$ $\frac{a-c}{4}$	$\frac{a-c}{2}$ $\frac{a-c}{4}$	$\frac{a-c}{2}$ $\frac{a-c}{2}$
profitto	$\frac{(a-c)^2}{9}$ $\frac{(a-c)^2}{9}$	$\frac{(a-c)^2}{8}$ $\frac{(a-c)^2}{8}$	$\frac{(a-c)^2}{8}$ $\frac{(a-c)^2}{16}$	0 0
prezzo	$\frac{a+2c}{3}$	$\frac{a+c}{2}$	$\frac{a+3c}{4}$	c

La produzione complessiva ha il seguente ordine decrescente:

$$iv - iii - i - ii$$

Il profitto complessivo ha il seguente ordine decrescente:

$$ii - i - iii - iv$$

Il prezzo ha il seguente ordine decrescente (ricordando che $a > c$):

$$ii - i - iii - iv$$

- la situazione *socialmente* migliore è il duopolio di Bertrand, o in generale la libera concorrenza (massima disponibilità del bene al prezzo minimo)
  la situazione *socialmente* peggiore è il monopolio alla Cournot, o in generale il monopolio, (minima disponibilità del bene al prezzo massimo)
  il duopolio di Stackelberg è *socialmente* preferibile al duopolio di Cournot in quanto la disponibilità del bene è maggiore e il prezzo è minore

- dal punto di vista delle imprese il monopolio alla Cournot garantisce ad entrambe il profitto massimo e quindi si può dedurre che la soluzione di Cournot è inefficiente, ma non risulta stabile
  Infatti se un'impresa viola l'accordo e aumenta la sua produzione può incrementare il suo profitto, nonostante il prezzo si riduca
  Se l'impresa 1 decide di produrre $\dfrac{a-c}{4}+\varepsilon$ il prezzo scende a $\dfrac{a+c}{2}-\varepsilon$ e il suo profitto è $\dfrac{(a-c)^2}{8}+\dfrac{a-c}{4}\varepsilon-\varepsilon^2$ che risulta maggiore se $\varepsilon<\dfrac{a-c}{4}$
  Per $\varepsilon=\dfrac{a-c}{4}$ si ottiene la soluzione di Stackelberg
- dal punto di vista delle imprese il duopolio di Stackelberg è preferibile al duopolio di Cournot per l'impresa leader ma non per l'impresa follower

1.7 Il modello di Hotelling

Include anche l'aspetto spaziale

I due agenti producono un unico identico bene e devono decidere dove collocarsi per vendere il loro prodotto
A parità di prezzo i consumatori si recheranno dall'agente più vicino
Il mercato è rappresentato dal segmento $(0, 1)$ e i consumatori sono uniformemente distribuiti lungo il segmento stesso
L'esempio più classico è quello di due gelatai che devono decidere dove collocarsi lungo una spiaggia

Nella soluzione ottimale gli agenti si collocano entrambi nel punto $\frac{1}{2}$
Uno ottiene il segmento $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ e l'altro il segmento $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

Questa soluzione è stabile (*equilibrio di Hotelling*)

- Se un agente si colloca nel punto $\frac{1}{2} + 2\varepsilon$ e l'altro nel punto $\frac{1}{2}$, lui ottiene il segmento $\left(\frac{1}{2} + \varepsilon, 1\right)$ e l'altro il segmento $\left(0, \frac{1}{2} + \varepsilon\right)$
- Se un agente si colloca nel punto $\frac{1}{2} - 2\varepsilon$, lui ottiene il segmento $\left(0, \frac{1}{2} - \varepsilon\right)$ e l'altro il segmento $\left(\frac{1}{2} - \varepsilon, 1\right)$.

- Questa soluzione è socialmente inefficiente in quanto per i consumatori l'agente più vicino è ad una distanza media di $\frac{1}{4}$
  La soluzione efficiente è che un agente si collochi nel punto $\frac{1}{4}$ e l'altro nel punto $\frac{3}{4}$, poichè in questo caso l'agente più vicino è ad una distanza media di $\frac{1}{8}$
  Anche in questo caso un agente ottiene il segmento $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ e l'altro il segmento $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, ma questa soluzione non è stabile.

- Questo modello permette di rappresentare il comportamento dei candidati nei sistemi elettorali bipolari, ad esempio l'elezione del presidente degli Stati Uniti
  Il segmento rappresenta le posizioni degli elettori sull'asse *Democratici-Repubblicani* e i due agenti sono i candidati che cercano di collocarsi al centro (*"rush for the middle"*), tenendo conto che la distribuzione degli elettori non è uniforme

2 Calcolo dell'equilibrio di Nash in strategie miste

Si consideri la Battaglia dei Sessi
Se il giocatore I gioca la strategia mista $(p, 1-p)$ e il giocatore II gioca la strategia mista $(q, 1-q)$ la vincita attesa del giocatore I è:

$$v_I(p) = 2pq + 0(1-p)q + 0p(1-q) + 1(1-p)(1-q) = 3pq - p - q + 1 = (3q-1)p - (q-1)$$

Il secondo termine non dipende da p; si hanno quindi tre casi

$3q - 1 > 0 \Rightarrow p = 1$ (strategia pura)
$3q - 1 = 0 \Rightarrow p$ (qualsiasi)
$3q - 1 < 0 \Rightarrow p = 0$ (strategia pura)

Analogamente la vincita attesa del giocatore II è:

$$v_{II}(q) = 1pq + 0(1-p)q + 0p(1-q) + 2(1-p)(1-q) = 3pq - 2p - 2q + 2 = (3p-2)q - 2(p-1)$$

a cui corrispondono i tre casi:

$3p - 2 > 0 \Rightarrow q = 1$ (strategia pura)
$3p - 2 = 0 \Rightarrow q$ (qualsiasi)
$3p - 2 < 0 \Rightarrow q = 0$ (strategia pura)

Si ha un equilibrio in strategie miste se:

$$3q - 1 = 0 \Rightarrow q = \frac{1}{3}$$
$$3p - 2 = 0 \Rightarrow p = \frac{2}{3}$$

cioè $\left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)$

- La vincita attesa è $v_I = v_{II} = \frac{2}{3}$, cioè inferiore alla vincita minima derivante da un accordo (non vincolante) per una strategia pura