Teoria dei giochi applicata alle scienze sociali, esame 20 luglio 2006, foglio A
Laurea Specialistica in Ingegneria Gestionale, Politecnico di MI, 2005/06

Tempo: 2 ore e 1/2; risolvere 3 dei 4 esercizi proposti; le risposte agli esercizi 2 e 3 non possono superare le due pagine; non è consentito l'uso di testi, appunti, etc...

GIUSTIFICARE LE RISPOSTE.

Non scrivere la soluzione di esercizi diversi su uno stesso foglio.

Esercizio 1 A

a) Sia $G = (X, Y, Z, f, g, h)$ un gioco finito a tre giocatori. Provare che, se una strategia mista domina fortemente una strategia pura, quest'ultima strategia sarà usata con probabilità 0 in un equilibrio di Nash dell'estensione mista di G. Provare che la dominanza stretta non è invece sufficiente per garantire questo risultato.

b) Trovare tutti gli equilibri in strategie pure del gioco seguente:

$I \backslash II$	L			R		
T	1	3	1	1	2	0
M	3	2	0	0	3	1
B	0	1	1	3	2	0

III sceglie S

$I \backslash II$	L			R		
T	1	1	0	1	0	1
M	2	1	1	3	2	0
B	3	0	0	0	3	1

III sceglie D

c) Trovarne tutti gli equilibri in strategie miste utilizzando, tra l'altro, in modo adeguato il risultato descritto al punto "a)"

Soluzione

parte a)

Occupiamoci, senza ledere la generalità, del giocatore I e supponiamo che sia $X = \{x_1, \dots, x_m\}$. Una strategia mista sarà $p = (p_1, \dots, p_m) \in \Delta(X)$. Supponiamo che p domini fortemente la strategia x_i.

Cioè:

$$f(p, q, r) > f(x_i, q, r) \quad \forall q, r \in \Delta(Y) \times \Delta(Z)$$

Poiché $f(p, q, r) = \sum_{j=1}^{m} p_j f(x_j, q, r)$, si ha:

$$\sum_{j \neq i} p_j f(x_j, q, r) > (1 - p_i) f(x_i, q, r) \quad \forall q, r \in \Delta(Y) \times \Delta(Z)$$

Dal che si vede che $p_i < 1$ (altrimenti avremmo una uguaglianza, visto che $1 - p_i = \sum_{j \neq i} p_j$). Inoltre, dividendo per $1 - p_i$, otteniamo:

$$\sum_{j \neq i} \frac{p_j}{1 - p_i} f(x_j, q, r) > f(x_i, q, r) \quad \forall q, r \in \Delta(Y) \times \Delta(Z)$$

Ovvero, se una strategia mista domina fortemente x_i, ve ne è anche una che domina x_i e che assegna probabilità zero ad x_i

Consideriamo allora un equilibrio di Nash $(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$, per il quale si avrà, in particolare:

$$f(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}) \geq f(p, \bar{q}, \bar{r}) \quad \forall p \in \Delta(X)$$

Se fosse $\bar{p}_i > 0$, la strategia mista:

$$\hat{p}_j = \begin{cases} \frac{\bar{p}_j}{1 - \bar{p}_i} & j \neq i \\ 0 & j = i \end{cases}$$

darebbe al giocatore I un payoff strettamente maggiore di $f(\bar{p}, q, r)$ per ogni $q, r \in \Delta(Y) \times \Delta(Z)$ (la giustificazione è data da calcoli identici a quelli visti sopra).

Allora, in particolare: $f(\hat{p}, \bar{q}, \bar{r}) > f(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$, in contraddizione col fatto che $(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ è un equilibrio di Nash.

Per quanto riguarda la dominanza stretta, basta considerare il seguente esempio (il giocatore III ha un'unica strategia a disposizione, diciamo S):

$I \backslash II$	L			R		
T	1	1	0	0	0	0
B	0	0	0	0	0	0

III sceglie S

La strategia T domina strettamente B per il giocatore I, ma (B, R, S) è un equilibrio di Nash del gioco dato.

parte b)

sottolineiamo i payoff in modo da evidenziare chi siano le migliori risposte per i giocatori:

$I \backslash II$	L			R		
T	1	$\underline{3}$	$\underline{1}$	1	2	0
M	$\underline{3}$	2	0	0	$\underline{3}$	$\underline{1}$
B	0	1	$\underline{1}$	$\underline{3}$	$\underline{2}$	0

III sceglie S

$I \backslash II$	L			R		
T	1	$\underline{1}$	0	1	0	$\underline{1}$
M	2	1	$\underline{1}$	$\underline{3}$	$\underline{2}$	0
B	$\underline{3}$	0	0	0	$\underline{3}$	$\underline{1}$

III sceglie D

Non c'è alcuna casella che abbia tutti e tre i payoff sottolineati, quindi non vi è alcun equilibrio di Nash in strategie pure.

parte c)

La strategia T per I è dominata fortemente dalla strategia mista che assegna probabilità $1/2$ ad M ed a B.

A questo punto la strategia L per II è fortemente dominata da R.

Quindi, per quanto riguarda la ricerca di equilibri di Nash, il gioco si è ridotto a:

$I \backslash II$	R
M	0 3 1
B	3 2 0

III sceglie S

$I \backslash II$	R
M	3 2 0
B	0 3 1

III sceglie D

Se ci liberiamo del giocatore II (che a questo punto non ha alcun ruolo significativo), abbiamo il gioco:

$I \backslash III$	S	D
M	0 1	3 0
B	3 0	0 1

Questo gioco non è altro che il "pari o dispari" (basta moltiplicare i payoff di I per $2/3$ e sottrarre 1, mentre per III si moltiplicano i payoff per 2 e si sottrae 1). Pertanto, esso ha un unico equilibrio in strategie miste che prevede che ciascuna delle strategie sia usata con probabilità $1/2$.

Da qui si ricostruisce facilmente l'unico equilibrio di Nash in strategie miste per il gioco assegnato, che è $((0, 1/2, 1/2), (0, 1), (1/2, 1/2))$.

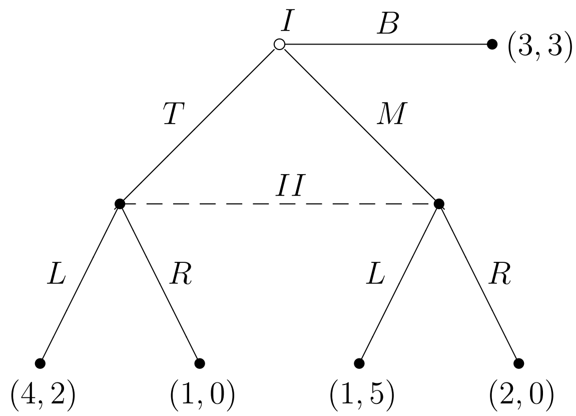
Ovvero, più in dettaglio:
- I gioca T con probabilità 0, M e B con probabilità $1/2$
- II gioca L con probabilità 0 ed R con probabilità 1
- III gioca S e D con probabilità $1/2$

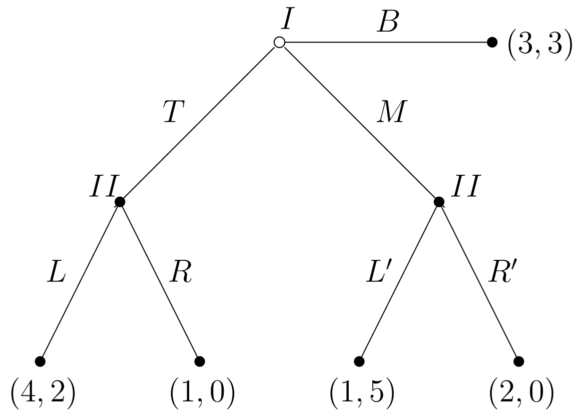
Esercizio 2 A Descrivere sinteticamente la definizione di nucleo e di valore Shapley per un TU-game. Illustrare comparativamente pregi e difetti di ciascuna delle due soluzioni.

Esercizio 3 A Presentare e discutere l'uso delle strategie miste e correlate nel contesto dei giochi non cooperativi in forma strategica.

Esercizio 4 A

Per ciascuno dei due giochi seguenti, descriverne la forma strategica e trovarne gli equilibri di Nash, gli equilibri perfetti nei sottogiochi e gli equilibri bayesiani perfetti. Non si richiede l'analisi dell'estensione mista di questi giochi.





Teoria dei giochi applicata alle scienze sociali, esame 20 luglio 2006, foglio B
Laurea Specialistica in Ingegneria Gestionale, Politecnico di MI, 2005/06

Tempo: 2 ore e 1/2; risolvere 3 dei 4 esercizi proposti; le risposte agli esercizi 2 e 3 non possono superare le due pagine; non è consentito l'uso di testi, appunti, etc...

GIUSTIFICARE LE RISPOSTE.

Non scrivere la soluzione di esercizi diversi su uno stesso foglio.

Esercizio 1 B
a) Sia $G = (X, Y, Z, f, g, h)$ un gioco finito a tre giocatori. Provare che, se una strategia mista domina fortemente una strategia pura, quest'ultima strategia sarà usata con probabilità 0 in un equilibrio di Nash dell'estensione mista di G. Provare che la dominanza stretta non è invece sufficiente per garantire questo risultato.

b) Trovare tutti gli equilibri in strategie pure del gioco seguente:

$I \backslash II$	L	C	R
T	2 5 0	3 0 1	2 2 2
B	1 4 1	0 5 0	4 2 4

III sceglie S

$I \backslash II$	L	C	R
T	3 0 1	4 5 0	5 2 1
B	1 5 2	1 0 0	1 2 5

III sceglie D

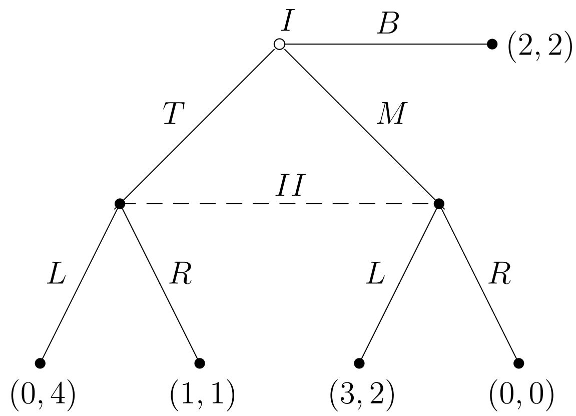
c) Trovarne tutti gli equilibri in strategie miste utilizzando, tra l'altro, in modo adeguato il risultato descritto al punto "a)"

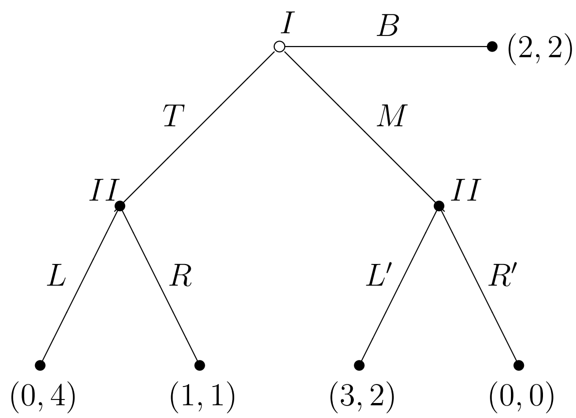
Esercizio 2 B Descrivere sinteticamente la definizione di nucleo e di valore Shapley per un TU-game. Illustrare comparativamente pregi e difetti di ciascuna delle due soluzioni.

Esercizio 3 B Presentare e discutere l'uso delle strategie miste e correlate nel contesto dei giochi non cooperativi in forma strategica.

Esercizio 4 B

Per ciascuno dei due giochi seguenti, descriverne la forma strategica e trovarne gli equilibri di Nash, gli equilibri perfetti nei sottogiochi e gli equilibri bayesiani perfetti. Non si richiede l'analisi dell'estensione mista di questi giochi.





Soluzione

La forma strategica del primo gioco è:

$I \backslash II$	L	R
T	$(0,4)$	$(1,1)$
M	$(3,2)$	$(0,0)$
B	$(2,2)$	$(2,2)$

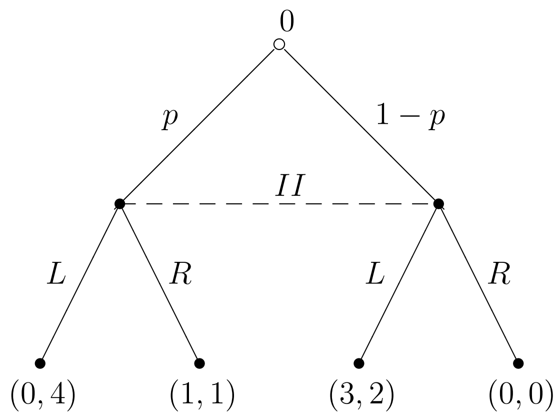
Mettiamo in evidenza con sottolineature la “best reply”:

$I \backslash II$	L	R
T	$(0, \underline{4})$	$(1, 1)$
M	$(\underline{3}, \underline{2})$	$(0, 0)$
B	$(2, \underline{2})$	$(\underline{2}, \underline{2})$

Si vede quindi che vi sono due equilibri di Nash: (M, L) e (B, R).

Quanto ai SPE, non vi sono sottogiochi e quindi i due equilibri di Nash trovati sono anche SPE (equilibri perfetti nei sottogiochi).

Per gli equilibri bayesiani perfetti, osserviamo che vi è un solo insieme di informazione non banale, che “compete” al giocatore II e quindi introduciamo un sistema di credenze (belief) relativo ai nodi del suo insieme di informazione. Dopo di che, consideriamo il “gioco di continuazione” che, nel nostro caso, può essere rappresentato così:



Evidentemente L è l’unico equilibrio di Nash per il gioco di continuazione, $\forall p \in [0, 1]$.

Quindi, (M, L) è l’unica coppia di strategie che corrisponde ad un PBE (equilibrio bayesiano perfetto),“sostenuta” da qualsiasi set di credenze di II. Invece, la scelta di R non può essere giustificata da alcun set di credenze e quindi (B, R) non può essere PBE.

Per concludere, l’unico sistema di belief coerente con (M, L) è $p = 0$, pertanto l’equilibrio bayesiano perfetto è $(M; 0, L)$.

La forma strategica del secondo gioco è:

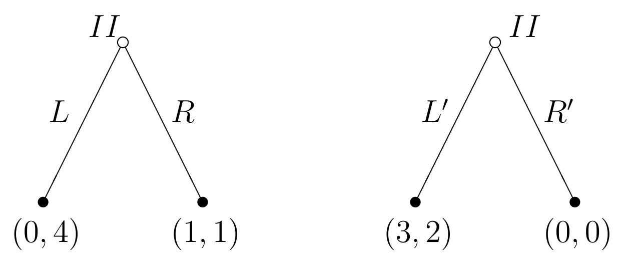
$I \backslash II$	LL’	LR’	RL’	RR’
T	$(0, 4)$	$(0, 4)$	$(1, 1)$	$(1, 1)$
M	$(3, 2)$	$(0, 0)$	$(3, 2)$	$(0, 0)$
B	$(2, 2)$	$(2, 2)$	$(2, 2)$	$(2, 2)$

Mettiamo in evidenza con sottolineature la “best reply”:

$I \backslash II$	LL’	LR’	RL’	RR’
T	$(0,\underline{4})$	$(0,\underline{4})$	$(1,1)$	$(1,1)$
M	$(\underline{3},\underline{2})$	$(0,0)$	$(\underline{3},\underline{2})$	$(0,0)$
B	$(2,\underline{2})$	$(\underline{2},\underline{2})$	$(2,\underline{2})$	$(\underline{2},\underline{2})$

Abbiamo quindi 4 equilibri di Nash: (M, LL'), (M, RL'), (B, LR') e (B, RR').

Il gioco dato ha due sottogiochi propri:



Gli equilibri di Nash di questi due giochi sono, rispettivamente: L e L'.

Quindi, l’unico SPE è (M, LL')

Non essendovi insiemi di informazione non degeneri, (M, LL') sarà anche equilibrio bayesiano perfetto.