Appunti

Vito Fragnelli

A.A. 2006-2007

Capitolo 1

Duopolio

1.1 Introduzione

Su un mercato economico le imprese possono assumere vari ruoli, che possono essere sintetizzate come *monopolio*, quando un'impresa è in grado di governare completamente il mercato, stabilendo autonomamente quantità da produrre e prezzo di vendita; *oligopolio*, quando poche imprese governano il mercato, ma devono ciascuna tenere conto delle altre e della richiesta del mercato stesso; *concorrenza*, quando nessuna impresa è in grado di attuare una propria politica, ma subisce le regole del mercato.

Il caso dell'oligopolio è certamente quello più interssante dal punto di vista delle *interazioni strategiche* tra le imprese operanti; tra le varie situazioni la più semplice è il *duopolio*, in cui sul mercato operano solo due imprese.

Per rendere la situazione più semplice dal punto di vista computazionale si suppone che le due imprese producano allo stesso costo un *unico bene identico*, cioè nessuna delle due può utilizzare una qualsiasi differenza per alterare la domanda del mercato a favore del suo prodotto, ed inoltre le funzioni di costo e domanda sono supposte lineari a tratti.

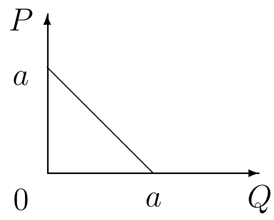
1.1.1 Il modello di Cournot

Nel duopolio di Cournot (1838), due imprese, 1 e 2, devono decidere simultaneamente la quantità di bene da produrre, mentre il prezzo è una funzione (solitamente decrescente) della quantità complessiva prodotta e immessa sul mercato. Si suppone che non ci siano costi fissi e che il costo per produrre un'unità di bene sia una costante strettamente positiva c, identica per le due imprese.

Il prezzo per unità di bene dipende dalle quantità $Q = q_1 + q_2$ di bene che le imprese producono:

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & se \;\; Q \leq a \\ 0 & se \;\; Q > a, \end{cases}$$

dove $a > c$ è una costante.



Il profitto dell'impresa i è dato da:

$$u_i(q_1, q_2) = P(Q)q_i - cq_i, \qquad i = 1, 2$$

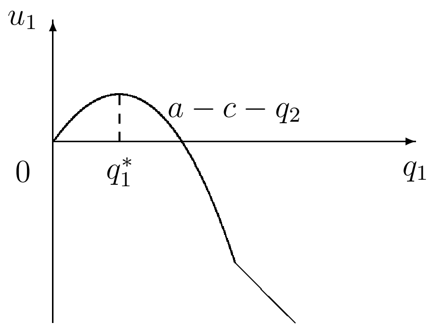
Il caso $a \leq c$ è banale poichè, essendo il costo unitario di produzione superiore al prezzo di vendita, le imprese sceglierebbero di non produrre.

Osservazione 1.1.1

- *Affinchè un'impresa realizzi un profitto non negativo è necessario che valga* $P(Q) \leq c$, *cioè* $Q \leq a - c$.
- *Le quantità presenti in questa trattazione sono talvolta considerate solo come valore, trascurando la dimensione; ad esempio in questa osservazione la relazione* $Q \leq a - c$ *non ha senso dimensionalmente, poichè* Q *è la quantità di bene prodotta complessivamente e* c *è il costo unitario.*

Supponendo che la seconda impresa produca $q_2 \leq a - c$, la prima impresa deciderà di produrre la quantità q_1 che massimizza il suo profitto. Dalle ipotesi fatte risulta:

$$u_1(q_1, q_2) = (P(Q) - c)q_1 = \begin{cases} -q_1^2 + (a - c - q_2)q_1 & \text{se } q_1 \leq a - q_2 \\ -cq_1 & \text{se } q_1 > a - q_2. \end{cases}$$



La quantità ottimale per l'impresa 1 è $q_1^* = \dfrac{a - c - q_2}{2}$.

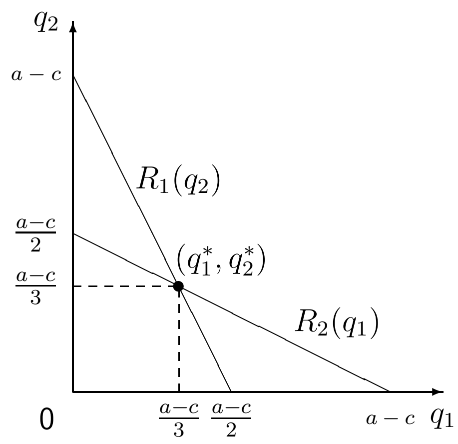
Data la simmetria delle due imprese, ragionando in maniera analoga si ottiene che la quantità ottimale per l'impresa 2 è $q_2^* = \dfrac{a - c - q_1}{2}$.

Il risultato ottenuto è incompleto, in quanto per ogni impresa si suppone nota la quantità prodotta dall'altra. Si possono allora determinare simultaneamente le quantità q_1^* e q_2^*, risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} q_1^* = \dfrac{a-c-q_2^*}{2} \\ q_2^* = \dfrac{a-c-q_1^*}{2} \end{cases}$$

che ha come soluzione $q_1^* = q_2^* = \dfrac{(a-c)}{3}$, a cui corrisponde il prezzo $\dfrac{(a+2c)}{3}$ e il profitto $u_1(q_1^*, q_2^*) = u_2(q_1^*, q_2^*) = \dfrac{(a-c)^2}{9}$.

Il modello di Cournot può essere interpretato come un gioco in cui i giocatori sono le due imprese, le strategie sono le quantità che ciascuna impresa può produrre e le funzioni di utilità delle imprese coincidono con le funzioni di profitto.
In questa situazione le quantità q_1^* e q_2^* possono essere viste come *miglior risposta di un'impresa alla strategia dell'altra*; la determinazione dei valori come soluzione del sistema può essere vista come equilibrio di Nash (*equilibrio di Cournot*) del gioco non cooperativo.



Soluzione dinamica (Best-reply)

La determinazione di q_1^* e q_2^* come soluzione del sistema può indurre a ritenere che le due imprese debbano in qualche modo accordarsi ta loro. In realtà questo non è necessario, infatti si può supporre che al tempo iniziale t_0 le imprese producano le quantità arbitrarie q_1^0 e q_2^0; al tempo t_1 ciascuna impresa sceglie la miglior risposta alla scelta precedente dell'impresa concorrente, cioè $q_1^1 = \dfrac{a-c-q_2^0}{2}$ e $q_2^1 = \dfrac{a-c-q_1^0}{2}$; in generale al tempo t_n si ha $q_1^n = \dfrac{a-c-q_2^{n-1}}{2}$ e $q_2^n = \dfrac{a-c-q_1^{n-1}}{2}$. E' possibile verificare che:

$$\lim_{n\to+\infty} q_1^n = \lim_{n\to+\infty} q_2^n = \frac{(a-c)}{3}$$

Il risultato può essere ottenuto anche supponendo che ad ogni stadio solo una delle due imprese, alternativamente, ridetermini la sua produzione ottimale sulla base della produzione dell'altra nello stadio precedente.

1.1.2 Il modello di Bertrand

Nel duopolio di Bertrand (1883), le due imprese decidono, indipendentemente e simultaneamente, i prezzi del loro prodotto, mentre la quantità di bene prodotta è tale da soddisfare la domanda che dipende dal prezzo fissato. Analogamente a quanto fatto per il modello di Cournot, si suppone che non esistano costi fissi di produzione e che il costo di produzione unitario, uguale per le due imprese, sia c.

Anche in questo caso i prodotti delle due imprese sono supposti indistinguibili e il consumatore sceglie solo in base al prezzo. Detti p_1 e p_2 i prezzi scelti e $P = \min\{p_1, p_2\}$, la domanda, in funzione del prezzo è data da

$$D(P) = \begin{cases} a - P & \text{se } 0 \leq P \leq a \\ 0 & \text{se } P > a \end{cases}$$

dove $a > c$ è il prezzo massimo che i consumatori sono disposti a pagare.

Si supponga che se le due imprese scelgono lo stesso prezzo, allora si dividono il mercato a metà, altrimenti l'impresa che fissa il prezzo più alto non ha richiesta e quindi non produce e l'altra soddisfa tutta la richiesta del mercato. Le funzioni di utilità per le due imprese sono:

$$u_1(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_1 - c)(a - p_1)_+ \text{ se } p_1 < p_2 \\ \dfrac{(p_1 - c)(a - p_1)_+}{2} \text{ se } p_1 = p_2 \\ 0 \text{ se } p_1 > p_2 \end{cases}$$

$$u_2(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_2 - c)(a - p_2)_+ \text{ se } p_2 < p_1 \\ \dfrac{(p_2 - c)(a - p_2)_+}{2} \text{ se } p_1 = p_2 \\ 0 \text{ se } p_2 > p_1 \end{cases}$$

Questa situazione può essere vista come *pura concorrenza*; infatti ogni impresa è comunque in grado di soddisfare la domanda corrispondente al prezzo fissato, quindi l'unico prezzo che garantisce il massimo guadagno è $p_1 = p_2 = c$. Infatti se $p_i < c, i = 1, 2$ l'impresa i produce in perdita; allora deve essere verificata la condizione $p_i \geq c, i = 1, 2$, ma se un'impresa fissa un prezzo strettamente maggiore di c l'altra può conquistare tutto il mercato fissando un prezzo inferiore.

Osservazione 1.1.2

- *Si potrebbe pensare che il risultato del modello sia assurdo in quanto se $p_1 = p_2 = c$ entrambe le imprese non realizzano alcun profitto. Nella realtà la pura concorrenza non si verifica mai e in ogni caso il valore di c non è il mero costo di produzione, ma tiene conto di tutti i costi connessi, compresa la distribuzione e un guadagno minimo che giustifichi l'esistenza dell'impresa.*

Anche il modello di Bertrand può essere interpretato come un gioco in cui i giocatori sono le due imprese, le strategie sono i prezzi possibili e le funzioni di utilità sono date dalle funzioni di profitto.
E' facile verificare che i prezzi $p_1 = p_2 = c$ costituiscono l'unico equilibrio di Nash (*equilibrio di Bertrand*).

(c, c) è equilibrio di Nash
Se un'impresa fissa il prezzo c, l'altra impresa non ha risposte migliori di c, in quanto se sceglie un prezzo inferiore ottiene un payoff negativo, mentre se ne fissa uno maggiore, ottiene comunque un'utilità nulla.

(c, c) è l'unico equilibrio di Nash
Nessun altro punto $(\bar{p}_1, \bar{p}_2) \neq (c, c)$ è di equilibrio, infatti:

- se il minore dei due prezzi è strettamente minore di c, l'impresa che lo ha fissato ottiene un'utilità negativa, e può incrementarla fissando il prezzo c;
- se il minore dei due prezzi è maggiore o uguale di c e i prezzi sono diversi, l'impresa che lo ha fissato può incrementare la sua utilità fissando un prezzo leggermente più alto;
- se i prezzi sono uguali e strettamente maggiori di c, ciascuna impresa può aumentare la sua utilità riducendo leggermente il prezzo.

Questo risultato è noto come *paradosso di Bertrand*.

1.1.3 Il modello di Stackelberg

Nel duopolio di Stackelberg (1934), la situazione è simile al modello di Cournot in cui ciascuna impresa deve decidere la quantità da produrre, ma le due imprese agiscono in tempi differenti, precisamente l'impresa 1 è dominante (*leader*) e muove per prima e l'impresa 1 è subordinata (*follower*) e muove per seconda. Quindi l'impresa leader fissa la sua quantità ottimale q_1^* e l'impresa follower decide la sua quantità ottimale q_2^* sulla base della scelta dell'impresa 1. La quantità $Q = q_1^* + q_2^*$ determina il prezzo, come nel modello di Cournot.

Osservazione 1.1.3

- *L'impresa* 1*, sa di essere dominante e sa anche che l'impresa* 2 *fisserà la sua produzione* q_2^* *conoscendo la scelta* q_1^**, quindi nel decidere il valore di* q_1^* *l'impresa leader terrà conto della succesiva scelta dell'impresa follower.*

Per semplicità di calcolo e per poter successivamente fare un confronto, si suppone ancora che la funzione di prezzo sia

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & se \;\; Q \leq a \\ 0 & se \;\; Q > a, \end{cases}$$

e che il profitto dell'impresa i sia:

$$u_i(q_1, q_2) = P(Q)q_i - cq_i, \qquad i = 1, 2$$

Se l'impresa 1 produce la quantità q_1 la produzione ottimale per l'impresa 2 è come nel modello di Cournot:

$$q_2^* = \frac{a - c - q_1}{2}$$

e quindi l'impresa 1 produrrà la quantità:

$$\begin{aligned} q_1^* &= argmax \; u_1(q_1, q_2^*) = argmax \; \left\{ q_1 \left(a - q_1 - \frac{a - c - q_1}{2} \right) - cq_1 \right\} \\ &= argmax \; \left\{ -\frac{1}{2} q_1^2 + \frac{a - c}{2} q_1 \right\} = \frac{a - c}{2} \end{aligned}$$

da cui si ricava:

$$q_2^* = \frac{a - c}{4}$$

Il prezzo risultante è $P(q_1^* + q_2^*) = \dfrac{a + 3c}{4}$ e i profitti sono rispettivamente $u_1(q_1^*, q_2^*) = \dfrac{(a - c)^2}{8}$ e $u_2(q_1^*, q_2^*) = \dfrac{(a - c)^2}{16}$.

Anche il modello di Stackelberg può essere interpretato come un gioco in cui i giocatori, le strategie e le funzioni di utilità sono sono le stesse del modello di Cournot. La variante è che il gioco è a informazione perfetta, per cui l'esito si può ricavare con l'induzione a ritroso.
Anche in questo caso, la soluzione ottenuta costituisce un equilibrio di Nash (*equilibrio di Stackelberg*).

1.1.4 Confronto tra i modelli

Prima di effettuare qualsiasi considerazione, si può analizzare anche il caso di monopolio, supponendo che esista una sola impresa che decide quale qualtità produrre, sapendo di essere l'unica sul mercato. Utilizzando le stesse funzioni di prezzo e di profitto per semplicità e per poter confrontare i risultati si ha $Q^* = argmax\ u(Q) = argmax\ \{(a-Q)Q - cQ\} = \dfrac{a-c}{2}$ a cui corrisponde il prezzo $P(Q^*) = \dfrac{a+c}{2}$ e il profitto $U(Q^*) = \dfrac{(a-c)^2}{4}$.

Per poter fare un confronto si può ipotizzare che le due imprese si accordino tra di loro, gestendo la produzione, i prezzi e il mercato come se fossero in regime di monopolio, ad esempio dividendo equamente la produzione e conseguentemente i profitti, in un *monopolio alla Cournot*. In questo caso il prezzo è $\dfrac{a+c}{2}$, $q_1^* = q_2^* = \frac{a-c}{4}$ e $u_1(q_1^*, q_2^*) = u_2(q_1^*, q_2^*) = \frac{(a-c)^2}{8}$.

I risultati ottenuti sono riassunti nella seguente tabella:

	duopolio di Cournot (*i*)	monopolio alla Cournot (*ii*)	di duopolio Stackelberg (*iii*)	duopolio di Bertrand (*iv*)
produzione	$q_1^* = \dfrac{a-c}{3}$ $q_2^* = \dfrac{a-c}{3}$	$q_1^* = \dfrac{a-c}{4}$ $q_2^* = \dfrac{a-c}{4}$	$q_1^* = \dfrac{a-c}{2}$ $q_2^* = \dfrac{a-c}{4}$	$q_1^* = \dfrac{a-c}{2}$ $q_1^* = \dfrac{a-c}{2}$
profitto	$\dfrac{(a-c)^2}{9}$ $\dfrac{(a-c)^2}{9}$	$\dfrac{(a-c)^2}{8}$ $\dfrac{(a-c)^2}{8}$	$\dfrac{(a-c)^2}{8}$ $\dfrac{(a-c)^2}{16}$	0 0
prezzo	$\dfrac{a+2c}{3}$	$\dfrac{a+c}{2}$	$\dfrac{a+3c}{4}$	c

Osservando che la produzione complessiva ha il seguente ordine decrescente:

$$iv - iii - i - ii$$

il profitto complessivo ha il seguente ordine decrescente:

$$ii - i - iii - iv$$

e il prezzo ha il seguente ordine decrescente (ricordando che $a > c$):

$$ii - i - iii - iv$$

si possono fare alcune considerazioni:

- la situazione *socialmente* migliore è il duopolio di Bertrand, o in generale la libera concorrenza (massima disponibilità del bene al prezzo minimo);
  la situazione *socialmente* peggiore è il monopolio alla Cournot, o in generale il monopolio, (minima disponibilità del bene al prezzo massimo);
  il duopolio di Stackelberg è *socialmente* preferibile al duopolio di Cournot in quanto la disponibilità del bene è maggiore e il prezzo è minore;

- dal punto di vista delle imprese il monopolio alla Cournot garantisce ad entrambe il profitto massimo e quindi si può dedurre che la soluzione di Cournot è inefficiente, ma non risulta stabile. Infatti se un'impresa viola l'accordo e aumenta la sua produzione può incrementare il suo profitto, nonostante il prezzo si riduca. Se l'impresa 1 decide di produrre $\frac{a-c}{4}+\varepsilon$ il prezzo scende a $\frac{a+c}{2}-\varepsilon$ e il suo profitto è $\frac{(a-c)^2}{8}+\frac{a-c}{4}\varepsilon-\varepsilon^2$ che risulta maggiore se $\varepsilon < \frac{a-c}{4}$. Si noti che per $\varepsilon = \frac{a-c}{4}$ si ottiene la soluzione di Stackelberg;

- dal punto di vista delle imprese il duopolio di Stackelberg è preferibile al duopolio di Cournot per l'impresa leader ma non per l'impresa follower.

1.1.5 Il modello di Hotelling

Per completare la trattazione del duopolio, si può accennare al *modello di Hotelling*, che permette alcune interessanti osservazioni. La caratteristica principale è di includere anche l'aspetto spaziale.

In questo caso i due agenti, che come nei casi precedenti producono un unico identico bene, devono decidere dove collocarsi per vendere il loro prodotto, sapendo che i consumatori a parità di prezzo si recheranno dall'agente più vicino. Per semplificare il problema si suppone che il mercato sia rappresentato dal segmento $(0, 1)$ e che i consumatori siano uniformemente distribuiti lungo il segmento stesso. L'esempio più classico del duopolio di Hotelling è quello di due gelatai che devono decidere dove collocarsi lungo una spiaggia.

La soluzione ottimale è che gli agenti si collochino entrambi nel punto $\frac{1}{2}$, uno vicino all'altro, in modo che uno ottenga il segmento $(0, \frac{1}{2})$ e l'altro il segmento $(\frac{1}{2}, 1)$. Questa soluzione è stabile (*equilibrio di Hotelling*), infatti se un agente si colloca nel punto $\frac{1}{2}$ e l'altro nel punto $\frac{1}{2} + 2\varepsilon$, il primo ottiene il segmento $(0, \frac{1}{2} + \varepsilon)$ e il secondo il segmento $(\frac{1}{2} + \varepsilon, 1)$; analogamente se il secondo agente si colloca nel punto $\frac{1}{2} - 2\varepsilon$, il primo ottiene il segmento $(\frac{1}{2} - \varepsilon, 1)$ e il secondo il segmento $(0, \frac{1}{2} - \varepsilon)$.

Osservazione 1.1.4

- *Questa soluzione è socialmente inefficiente in quanto per i consumatori l'agente più vicino è ad una distanza media di* $\frac{1}{4}$.
  E' facile verificare che la soluzione efficiente è che un agente si collochi nel punto $\frac{1}{4}$ *e l'altro nel punto* $\frac{3}{4}$, *poichè in questo caso l'agente più vicino è ad una distanza media di* $\frac{1}{8}$. *Si noti che anche in questo modo un agente ottiene il segmento* $(0, \frac{1}{2})$ *e l'altro il segmento* $(\frac{1}{2}, 1)$. *Ma questa soluzione non è stabile.*

- *Questo modello permette di rappresentare il comportamento dei candidati nei sistemi elettorali bipolari, ad esempio l'elezione del presidente degli Stati Uniti. In questo caso il segmento rappresenta le posizioni degli elettori sull'asse* Democratici-Repubblicani *e i due agenti sono i candidati che cercano di collocarsi al centro (*“rush for the middle”*), tenendo conto che la distribuzione degli elettori non è uniforme.*

Capitolo 2

Giochi cooperativi

2.1 Introduzione

I giocatori di un gioco non devono necessariamente avere interessi contrastanti, ma possono perseguire un fine comune, almeno per la durata del gioco, pertanto è possibile che alcuni di essi tendano ad associarsi per migliorare il proprio risultato.

Per realizzare la cooperazione:

- deve essere possibile stipulare accordi (ad esempio non devono esserci regole antitrust o difficoltà di comunicazione);
- deve esserci la possibilità di far rispettare tali accordi, nel senso che deve esistere una autorità sufficientemente forte e accettata da tutti i componenti.

Una ulteriore suddivisione dei giochi cooperativi fa riferimento a come i giocatori di una coalizione possono ripartirsi la vincita. Si distinguono due sottoclassi:

- Giochi cooperativi senza pagamenti laterali (NTU-Games): i giocatori ricevono un payoff preassegnato.
- Giochi cooperativi a pagamenti laterali (TU-Games): i giocatori di una coalizione possono ripartirsi in qualsiasi modo la vincita.

I secondi costituiscono un caso particolare dei primi.
In particolare per avere un gioco TU devono essere soddisfatte tre ipotesi:

- deve essere possibile trasferire l'utilità (da un punto di vista normativo);
- deve esistere un mezzo comune di scambio, ad esempio il denaro, con cui trasferire l'utilità (da un punto di vista materiale);
- le funzioni di utilità dei giocatori devono essere equivalenti, ad esempio funzioni lineari della quantità di denaro.

Esempio 2.1.1 (Coalizione semplice) *Sono dati tre giocatori I, II, III; se due di loro si accordano, formando una coalizione, il terzo giocatore da ad ognuno di essi una moneta, altrimenti nessuno riceve nulla. I payoff sono:*

$(1, 1, -2)$	*se I e II si coalizzano*
$(1, -2, 1)$	*se I e III si coalizzano*
$(-2, 1, 1)$	*se II e III si coalizzano*
$(0, 0, 0)$	*altrimenti*

Se i payoff relativi alla coalizione (II, III) fossero $(-2.0, 1.1, 0.9)$ *la posizione del giocatore II non si rafforza in quanto il giocatore III ha più interesse a coalizzarsi con I che con II; questa situazione non sussiste nel caso in cui sia possibile per II "trasferire" parte della propria vincita al giocatore III, ritornando alla situazione precedente.* $\diamondsuit$

2.1.1 Funzione caratteristica per un gioco TU

La funzione caratteristica di un gioco TU può essere costruita a partire dalla forma strategica del gioco a due persone tra le coalizioni S ed $N \setminus S$:

$$v'(S) = \max_{\sigma_S \in \Sigma_S} \min_{\sigma_{N\setminus S} \in \Sigma_{N\setminus S}} \left\{ \sum_{i \in S} u_i(\sigma_S, \sigma_{N\setminus S}) \right\} \quad \text{(von Neumann-Morgenstern)}$$

$$v''(S) = \min_{\sigma_{N\setminus S} \in \Sigma_{N\setminus S}} \max_{\sigma_S \in \Sigma_S} \left\{ \sum_{i \in S} u_i(\sigma_S, \sigma_{N\setminus S}) \right\}$$

Ovviamente i due risultati possono non coincidere, in particolare il secondo è non inferiore al primo. Ma questa osservazione è assolutamente trascurabile al fine di assegnare correttamente il valore di $v(S)$.

Esempio 2.1.2 (Costruzione della funzione caratteristica - I) *Si consideri il seguente gioco a tre giocatori:*

3 = S		
1 / 2	*L*	*R*
T	$1, 0, 4$	$1, 0, -2$
B	$1, 2, -3$	$0, -1, -5$

3 = C		
1 / 2	*L*	*R*
T	$1, -3, -3$	$2, 0, -4$
B	$0, 1, 4$	$0, -1, -2$

3 = D		
1 / 2	*L*	*R*
T	$1, 4, 3$	$2, -3, 4$
B	$2, 2, 3$	$0, 1, 5$

Volendo determinare il valore di v si può costruire il gioco tra $S = \{1, 2\}$ *e* $N \setminus S = \{3\}$*:*

S / $N \setminus S$	N_1	N_2	N_3
S_1	$1, 4$	$-2, -3$	$5, 3$
S_2	$1, -2$	$2, -4$	$-1, 4$
S_3	$3, -3$	$1, 4$	$4, 3$
S_4	$-1, -5$	$-1, -2$	$1, 5$

dove $S_1 = (T, L)$, $S_2 = (T, R)$, $S_3 = (B, L)$, $S_4 = (B, R)$ *e* $N_1 = S$, $N_2 = C$, $N_3 = D$.
È facile a questo punto determinare i valori di $v(\{1, 2\})$ *associati alle precedenti definizioni:*

$$v'(S) = \max_{\sigma_S \in \Sigma_S} \min_{\sigma_{N\setminus S} \in \Sigma_{N\setminus S}} \left\{ \widehat{u}_i(\sigma_S, \sigma_{N\setminus S}) \right\} = \max\{-2, -1, 1, -1\} = 1$$

$$v''(S) = \min_{\sigma_{N\setminus S} \in \Sigma_{N\setminus S}} \max_{\sigma_S \in \Sigma_S} \left\{ \widehat{u}_i(\sigma_S, \sigma_{N\setminus S}) \right\} = \min\{3, 2, 5\} = 2$$

Il secondo risultato è preferibile al primo, ma in questo caso non si tratta di "preferire" un risultato ma di rappresentare una situazione.
Si può osservare che il valore $v'(S)$ corrisponde alla strategia S_3 ed in effetti la coalizione S giocando $S_3 = (B, L)$ può garantirsi un payoff non inferiore a 1, mentre il valore $v''(S)$ corrisponde alla strategia S_2, ma la coalizione S giocando $S_2 = (T, R)$ non può garantirsi un payoff non inferiore a 2, anzi probabilmente il suo payoff risulterà inferiore.
In realtà entrambe le interpretazioni difettano di realismo poichè lo scopo della coalizione $N \setminus S$ è quello di massimizzare il proprio payoff e non di minimizzare il payoff di S. Quindi la validità delle formule precedenti è limitata dal fatto di non considerare le utilità di $N \setminus S$: in questo caso è facile osservare che $N \setminus S$ considera "rischiose" le strategie N_1 ed N_2, in corrispondenza delle quali si hanno i valori $v'(S)$ e $v''(S)$. ♢

Inoltre esiste un altro punto fondamentale dato dalle funzioni di utilità dei giocatori. La base di partenza sono le preferenze dei giocatori di cui le funzioni di utilità sono solo rappresentazioni, pertanto la scelta delle strategie dei giocatori di S dovrebbe avvenire non sulle funzioni di utilità, ma sulle preferenze, mentre si può osservare nell'esempio precedente che triplicando le utilità del giocatore 1 si ottiene:

S / $N \setminus S$	N_1	N_2	N_3
S_1	$3, 4$	$0, -3$	$7, 3$
S_2	$3, -2$	$6, -4$	$3, 4$
S_3	$5, -3$	$1, 4$	$8, 3$
S_4	$-1, -5$	$-1, -2$	$1, 5$

e quindi:

$$v'(S) = max\{0, 3, 1, -1\} = 3$$
$$v''(S) = min\{5, 6, 8\} = 5$$

Come prevedibile i valori risultano differenti, ma soprattutto si ottengono in corrispondenza di differenti strategie per la coalizione S, in particolare $v'(S)$ si ottiene per S_2 e $v''(S)$ per S_3. Questo dipende dall'aver dato alle funzioni di utilità un significato quantitativo che non necessariamente hanno. Sempre con riferimento alle funzioni di utilità si può evidenziare che non necessariamente sono additive, quindi non si può definire l'utilità della coalizione come la somma delle utilità.

La funzione caratteristica assegna ad ogni coalizione l'utilità che i giocatori possono ottenere "indipendentemente" dagli altri, ma questo termine merita qualche approfondimento; il significato di "qualunque sia la strategia" degli altri giocatori e di "escludendo" gli altri giocatori possono non definire correttamente il valore della coalizione; si può allora utilizzare il significato di "senza la collaborazione" degli altri giocatori.

Esempio 2.1.3 (Costruzione della funzione caratteristica - II) *Due fratelli, I e II, devono dividersi un'eredità costituita da 4 oggetti A, B, C, D ai quali assegnano valutazioni* *differenti, riportate nella seguente tabella:*

	A	B	C	D
I	12	10	9	6
II	2	3	1	5

L'esecutore testamentario dice ai due fratelli che in mancanza di un accordo provvederà ad assegnare 2 oggetti a ciascuno, a sua discrezione. In questo caso i due fratelli sanno che nel peggiore dei casi potrebbero ottenere i due oggetti che essi valutano meno, cioè C e D per I e A e C per II, e quindi hanno entrambi interesse ad un accordo che eviti questa situazione. Assegnando al giocatore I il valore $v(\{I\}) = 15$ corrispondente agli oggetti C e D che lui giudica di minor valore si sottintende che il giocatore II voglia tenersi gli oggetti A e B, ma questo è improbabile, visto che lascerebbe l'oggetto D che per lui ha valore massimo; analogamente il valore $v(\{I\}) = 22$ corrispondente ai due oggetti A e B che lui giudica di maggior valore non è adeguato in quanto implica che il giocatore II accetti di prendere l'oggetto C che per lui ha valore minimo; invece il giocatore I è certamente in grado di garantirsi il valore $v(\{I\}) = 21$ corrispondente a prendere gli oggetti A e C e a lasciare al giocatore II gli oggetti B e D che quest'ultimo giudica di maggior valore.
In maniera analoga il valore che il giocatore II può ottenere "senza la collaborazione" del giocatore I è $v(\{II\}) = 6$ corrispondente a prendere gli oggetti C e D e a lasciare al giocatore I gli oggetti A e B che quest'ultimo giudica di maggior valore.
La grande coalizione ha valore $v(\{I, II\}) = 37$, in quanto, avendo la possibilità di trasferire l'utilità, la scelta più vantaggiosa corrisponde a dare tutti gli oggetti al giocatore I, che dà a tutti gli oggetti un valore maggiore rispetto al giocatore II, salvo poi ripartire adeguatamente questo valore tra i due giocatori. $\diamondsuit$

Osservazione 2.1.1

- *Se il gioco fosse stato ad utilità non trasferibile la funzione caratteristica avrebbe assegnato alla grande coalizione tutte le coppie di valori che i due giocatori possono ottenere, ad esempio $(12, 9)$ corrispondente a dare l'oggetto A al giocatore I e gli altri tre oggetti al giocatore II, oppure $(18, 4)$ corrispondente a dare al giocatore I gli oggetti A e D e al giocatore II gli oggetti B e C, oppure $(0, 11)$ corrispondente a dare i quattro oggetti al giocatore II e così via.*

Sono state proposte altre definizioni per $v(S)$, ad esempio il valore ottenuto in corrispondenza delle strategie che massimizzano la differenza tra il payoff di S e di $N \setminus S$, ma nessuna supera le questioni poste, a meno di oppurtune ipotesi sulle funzioni di utilità, ad esempio supporre che siano additive e uguali per tutti i giocatori.

2.2 Giochi cooperativi a pagamenti laterali

In questi giochi introdotti da Von Neumann e Morgenstern (1944) i giocatori possono stipulare accordi vincolanti e possono ripartirsi la vincita con un accordo al di fuori delle regole del gioco, la cui validità può estendersi anche oltre la fine del gioco.

Il problema può essere come trasferire la vincita o utilità poichè i giocatori possono avere differenti funzioni di utilità.

Definizione 2.2.1 *Un gioco TU è una coppia $G = (N, v)$ dove N è l'insieme dei giocatori e v è la funzione caratteristica, con $v(\emptyset) = 0$.*

Se i valori della funzione v sono negativi si ha un *gioco di costi* o cost game (N, c) in cui si pone $c = -v$, in modo da operare con quantità non negative.

Esempio 2.2.1 (Gioco dei guanti) *Due insiemi di giocatori, L ed R, possiedono dei guanti; i giocatori di L possiedono solo guanti sinistri mentre i giocatori di R possiedono solo guanti destri. Il valore di una coalizione di giocatori è data dal numero di paia di guanti che riescono a formare. In generale ogni giocatore possiede un solo guanto. Nel caso in cui i giocatori di L siano 1 e 2 e i giocatori di R siano 3 e 4 si ha il seguente gioco:*

$$\begin{array}{ll} N = \{1,2,3,4\} & \\ v(i) = 0 & \forall\ i \in N \\ v(12) = v(34) = 0 & \\ v(S) = 1 & \textit{se } |S| = 2 \textit{ e } S \neq \{12\}, S \neq \{34\} \textit{ oppure se } |S| = 3 \\ v(N) = 2 & \end{array} \qquad \diamondsuit$$

Definizione 2.2.2 *Un gioco $G = (N, v)$ si dice monotono se $v(S) \leq v(T)$, $\forall\ S \subseteq T$.*

Definizione 2.2.3 *Un gioco $G = (N, v)$ si dice convesso se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:*

- $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T)$, $\forall\ S, T \subseteq N$.
- $v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T)$, $\forall\ S \subset T \subseteq N \setminus \{i\}$.

Definizione 2.2.4 *Un gioco $G = (N, v)$ si dice semplice 0-1 o semplice se le coalizioni possono assumere solo i valori 0 e 1.*
Se una coalizione ha valore 1 è detta vincente, se ha valore 0 è detta perdente. Solitamente la grande coalizione è vincente.

Definizione 2.2.5 *Un gioco $G = (N, v)$ si dice coesivo se per ogni partizione di N $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ si ha:*

$$\sum_{i=1,\ldots,k} v(S_i) \leq v(N)$$

Osservazione 2.2.1

- *Nella definizione di monotonia non si tiene conto della cardinalità delle coalizioni.*
- *L'equivalenza delle definizioni di convessità è oggetto di un teorema.*
- *I giochi semplici trovano applicazione nelle situazioni in cui una coalizione è caratterizzata dal riuscire a conseguire o meno un determinato risultato, come nei giochi di maggioranza, utilizzati in politica.*
- *La coesività è più debole della superadditività ed esprime la "convenienza" dei giocatori a formare la grande coalizione, piuttosto che riunirsi in sottocoalizioni. L'importanza deriva dal fatto che in generale i concetti di soluzione più comuni costituiscono una ripartizione del valore della grande coalizione.*

Le soluzioni di un gioco TU possono essere raggruppate in due famiglie:

- *soluzioni insiemistiche* che individuano un insieme di vettori payoff che ripartiscono il valore del gioco tra tutti i giocatori;
- *soluzioni puntuali* che individuano una sola ripartizione e che costituiscono l'attuale tendenza in quanto più simili all'idea classica di soluzione di un problema.

Capitolo 3

Soluzioni insiemistiche di un gioco TU

3.1 Imputazioni

Un'idea per determinare le singole vincite può essere risolvere un sottogioco ristretto ai giocatori di ciascuna coalizione, oppure suddividere in parti uguali la vincita, trascurando il contributo dei singoli giocatori; esistono però altri metodi più complessi che meglio tengono conto del ruolo svolto da ciascun giocatore e che definiscono altri concetti di soluzione.

Definizione 3.1.1 *Dato un gioco $G = (N, v)$ si dice imputazione o ripartizione del valore del gioco o soluzione del gioco un vettore $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ tale che:*

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N) \qquad \textit{ipotesi di efficienza}$$

$$x_i \geq v(i); i = 1, \dots, n \qquad \textit{ipotesi di forza dei giocatori o razionalità individuale}$$

Nel caso di un cost game la razionalità individuale richiede $x_i \leq c(i)$.

L'insieme di tutte le imputazioni si indica con $E(v)$.

Definizione 3.1.2 *Se per un gioco $G = (N, v)$ si ha:*

$$\sum_{i \in N} v(i) = v(N)$$

allora $E(v)$ ha come unico elemento $x = (v(1), v(2), \dots, v(n))$; in questo caso il gioco è detto inessenziale e essenziale altrimenti.

Per la razionalità individuale una imputazione deve assegnare ad ogni giocatore almeno quanto egli può ottenere da solo. Pertanto le imputazioni costituiscono un primo passo verso la determinazione della ripartizione delle vincite e ogni concetto di soluzione dovrà soddisfare questa condizione, cioè dovrà essere una imputazione. D'altra parte se il gioco è essenziale esistono più imputazioni possibili e si ripropone il problema di scegliere la soluzione. Infatti poichè la somma degli elementi delle imputazioni è costante se due imputazioni x e y sono distinte esiste almeno un giocatore k per cui $x_k > y_k$ e almeno un giocatore h per cui $x_h < y_h$.

Definizione 3.1.3

- *Date $x, y \in E(v)$ e una coalizione S si dice che x domina y mediante $S, x \succ_S y$, se:*

  1. $x_i > y_i \qquad \forall i \in S$
  2. $x(S) \leq v(S)$

  dove $x(S) = \sum\limits_{i \in S} x_i$.

- *Date $x, y \in E(v)$ si dice che x domina y, $x \succ y$, se esiste S tale che $x \succ_S y$.*

La dominanza non è riflessiva, nè antisimmetrica, nè transitiva.

Esempio 3.1.1 (Non antisimmetria) *Sia dato il seguente gioco:*

$$\begin{array}{l} N = \{1,2,3,4\} \\ v(i) = 0 \\ v(i,j) = v(i,j,k) = v(N) = 1 \qquad \forall i,j,k \end{array}$$

Date le seguenti imputazioni $x = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$ e $y = (0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ si ha:

$$x \succ_{\{1,2\}} y \text{ e } y \succ_{\{3,4\}} x \qquad \diamondsuit$$

3.2 Nucleo

Probabilmente il concetto di soluzione insiemistico più interessante per numerose classi di giochi è il nucleo; è stato introdotto da Gillies (1953 e 1959). L'idea di base è quella di considerare il comportamento delle imputazioni rispetto alle coalizioni, richiedendo:

$$x(S) \geq v(S) \quad S \subset N \qquad \text{ipotesi di razionalità della coalizione}$$

Definizione 3.2.1 *Si dice nucleo di un gioco, o core, l'insieme:*

$$C(v) = \{x \in E(v) | x(S) \geq v(S), \forall\ S \subset N\}$$

Nel caso di un cost game c la razionalità della coalizione richiede $x(S) \leq c(S), \forall\ S \subset N$.

Osservazione 3.2.1

- *Le imputazioni non dominate costituiscono il nucleo del gioco.*
- *Il nucleo può essere vuoto come nel gioco di maggioranza semplice e in generale nei giochi essenziali a somma costante.*
- *Il nucleo ha un aspetto normativo, cioè dice quali soluzioni non bisogna scegliere (quelle che non stanno nel nucleo) se il nucleo è non vuoto. Ovviamente se il nucleo è vuoto non si può concludere che la grande coalizione non si forma, ma solo che è caratterizzata da una più o meno elevata instabilità.*

Esempio 3.2.1 (Nucleo del gioco dei guanti) *Riferendosi all'Esempio 2.2.1, il nucleo è:*

$$C(v) = \{(\alpha, \alpha, 1-\alpha, 1-\alpha) s.t. 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

In generale se $L = \{1, ..., n_l\}$ *e* $R = \{1, ..., n_r\}$ *si ha:*
se $n_l = n_r$*:*

$$C(v) = \{(\alpha, ..., \alpha, 1-\alpha, ..., 1-\alpha) s.t. 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

se $n_l < n_r$*:*

$$C(v) = \{(\underbrace{1, ..., 1}_{1,...,n_l}, \underbrace{0, ..., 0}_{1,...,n_r})\}$$

se $n_l > n_r$*:*

$$C(v) = \{(\underbrace{0, ..., 0}_{1,...,n_l}, \underbrace{1, ..., 1}_{1,...,n_r})\}$$

Il nucleo evidenzia il comportamento del mercato quando uno tra due beni complementari è carente. ♢

3.2.1 Bilanciamento

E' interessante poter stabilire se un gioco ha nucleo vuoto o meno, in quanto ciò fornisce indicazioni sulla stabilità della grande coalizione. Si noti che la coesività o la superadditività non danno informazioni precise; ad esempio il gioco di maggioranza semplice ha nucleo vuoto ma è superadditivo e quindi anche coesivo; d'altra parte un gioco può non essere superadditivo, ma avere nucleo non vuoto, come nel seguente esempio.

Esempio 3.2.2 (Gioco non superadditivo a nucleo non vuoto) *Si consideri il gioco TU:*

$$\begin{array}{ll} N = \{1, 2, 3\} & \\ v(S) = 1 & \text{se } S \neq N \\ v(N) = 3 & \end{array}$$

Il gioco non è superadditivo poichè $v(1) + v(2) = 2$ *e* $v(12) = 1$ *ma ha nucleo non vuoto in quanto* $x = (1, 1, 1) \in C(v)$*.* ♢

Invece se un gioco non è coesivo ha nucleo vuoto, in quanto esisterebbero una allocazione x e una partizione $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ per cui si avrebbe:

$$x(N) = v(N) < \sum_{i=1,\dots,k} v(S_i) \leq \sum_{i=1,\dots,k} x(S_i) = x(N)$$

E' necessario avere un criterio più preciso che permetta una caratterizzazione completa ma semplice.

Dalla definizione si ricava che le imputazioni del nucleo possono essere caratterizzate come le soluzioni del problema lineare:

$$\begin{array}{rll} min & z = \sum_{i \in N} x_i & \\ s.t. & \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) & \forall S \subseteq N \end{array}$$

per le quali $z^* = v(N)$.

Il duale del problema precedente si può scrivere come:

$$\begin{array}{rll} max & w = \sum_{S \subseteq N} y_s v(S) & \\ s.t. & \sum_{S \ni i} y_S = 1 & \forall i \in N \\ & y_S \geq 0 & \forall S \subseteq N \end{array}$$

per le quali $w^* = v(N)$.

Questo permette di stabilire il seguente teorema.

Teorema 3.2.1 *Un gioco v ha nucleo non vuoto se e solo se esiste una soluzione del problema primale con $z^* = v(N)$ o equivalentemente (per il primo teorema della dualità) esiste una soluzione del problema duale con $w^* = v(N)$.*

Purtroppo l'utilità di questo teorema è molto limitata in quanto la difficoltà di verificare una delle tre condizioni è equivalente. Si può fare un passo avanti introducendo le collezioni bilanciate.

Definizione 3.2.2

- *Una collezione $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ di sottoinsiemi di N è detta bilanciata se esistono m numeri non negativi $y_1, y_2, \dots, y_m$ detti coefficienti di bilanciamento, tali che:*

$$\sum_{S_j \ni i} y_j = 1 \qquad \forall i \in N$$

- *Una collezione bilanciata è detta minimale se nessuna sottocollezione è bilanciata.*

- *Un gioco è detto bilanciato se per ogni collezione bilanciata minimale $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ con coefficienti di bilanciamento $y_1, y_2, \dots, y_m$, si ha:*

$$\sum_{j=1,\dots,m} y_j v(S_j) \leq v(N)$$

Proprietà

- Ogni collezione bilanciata è unione di collezioni bilanciate minimali.
- Una collezione bilanciata è minimale se e solo se i coefficienti di bilanciamento sono unici.
- Le collezioni bilanciate non dipendono dalla funzione caratteristica, ma solo da N.

Esempio 3.2.3 (Collezioni bilanciate I)

1. *Ogni partizione di N è una collezione bilanciata, con coefficienti unitari.*
2. *Sia $N = \{1, 2, 3\}$; $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ è una collezione bilanciata con coefficienti $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. In generale per ogni N la collezione di $\binom{n}{s}$ sottoinsiemi distinti di s elementi è bilanciata con coefficienti $\binom{n-1}{s-1}^{-1}$.* $\diamondsuit$

A questo punto si può migliorare la caratterizzazione dei giochi a nucleo non vuoto.

Teorema 3.2.2 (Bondareva, 1963 - Shapley, 1967) *Un gioco $G = (N, v)$ ha nucleo non vuoto se e solo se è bilanciato.*

<u>Dimostrazione</u>

$$C(v) \neq \emptyset \iff v(N) = min \left\{ \sum_{i=1,\ldots,n} x_i | \; x(S) \geq v(S) \; \forall \; S \subseteq N \right\} \iff$$

$$\iff v(N) = max \left\{ \sum_{S \subseteq N} y_S v(S) | \sum_{S \ni i} y_S = 1 \; \forall i \in N, y_S \geq 0 \; \forall \; S \subseteq N \right\} \iff$$

$$\iff \sum_{S \subseteq N} y_S v(S) \leq v(N)$$

$\clubsuit$

Osservazione 3.2.2

- *Il teorema di Bondareva-Shapley considera un sistema lineare generato da un sottoinsieme dei vincoli del problema duale associato al nucleo.*
- *Per un gioco superadditivo il teorema di Bondareva-Shapley è vero per le partizioni di N, quindi è sufficiente verificarlo per le altre collezioni bilanciate minimali.*
- *Il teorema è particolarmente utile per dimostrare che un gioco ha nucleo vuoto in quanto è sufficiente trovare una collezione bilanciata che non verifica la condizione.*
- *Un gioco a nucleo non vuoto viene anche detto bilanciato.*

Esempio 3.2.4 (Collezioni bilanciate II)

1. *Un gioco a tre giocatori superadditivo è bilanciato se e solo se* $v(12)+v(13)+v(23) \leq 2\ v(123)$ *poichè* $\mathcal{B} = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$ *è l'unica collezione bilanciata minimale con coefficienti* $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

2. *Sia dato il gioco:*

$$\begin{aligned}&N = \{1,2,3,4\}\\&v(1) = v(2) = v(3) = v(4) = v(14) = v(24) = 0; v(23) = v(34) = 2\\&v(12) = v(13) = v(123) = 3; v(124) = 4; v(134) = v(234) = 5; v(N) = 6\end{aligned}$$

Il gioco non è bilanciato in quanto $\mathcal{B} = \{\{1,2\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$ *è una collezione bilanciata con coefficienti* $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ *per la quale si ha:*

$$\frac{1}{2}v(12) + \frac{1}{2}v(134) + \frac{1}{2}v(234) = \frac{13}{2} > 6 = v(N) \qquad \diamondsuit$$

3.3 Esempi di giochi e nucleo

Questo paragrafo è dedicato a presentare alcune classi di giochi, per meglio approfondire il concetto di nucleo.

3.3.1 Bankruptcy game

Dopo il fallimento di una ditta un gruppo di creditori deve dividersi il capitale residuo, tenendo conto delle richieste di ciascuno. Formalmente un problema di bancarotta è una tripla $\mathcal{B} = (N, c, E)$, dove $N = \{1, ..., n\}$ è l'insieme dei creditori, $c = \{c_1, ..., c_n\}$ è il vettore delle richieste ed E è il capitale, con $E < \sum_{i \in N} c_i = C$; per semplicità un problema di bancarotta si può indicare come $(E; c_1, ..., c_n)$. Più in generale si ha un problema di bancarotta quando si deve allocare una risorsa insufficiente a coprire le richieste.

E' facile verificare che ogni ripartizione ammissibile ("razionale) del capitale, $x = \{x_1, ..., x_n\}$ deve soddisfare le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned}&\sum_{i \in N} x_i = E\\&0 \leq x_i \leq c_i, \qquad i \in N\end{aligned}$$

Tra le varie possibili soluzioni tre sono particolarmente importanti: proporzionale ($PROP$), Constrained Equal Award (CEA) e Constrained Equal Loss (CEL).

- $PROP$ - Le quote assegnate sono proporzionali alle richieste di ciascuno:

$$PROP_i = \frac{c_i}{C}E \qquad i \in N$$

- CEA - Le quote assegnate sono uguali per tutti, col vincolo di non superare le richieste di ciascuno:

$$CEA_i = \min(\alpha, c_i) \qquad i \in N$$

dove α è l'unico valore reale positivo per cui $\sum_{i \in N} CEA_i = E$

- CEL - Le quote assegnate sono uguali alle richieste di ciascuno diminuite di una quantità uguale per tutti, col vincolo di non assegnare quote negative:

$$CEL_i = \max(c_i - \beta, 0) \qquad i \in N$$

dove β è l'unico valore reale positivo per cui $\sum_{i \in N} CEL_i = E$

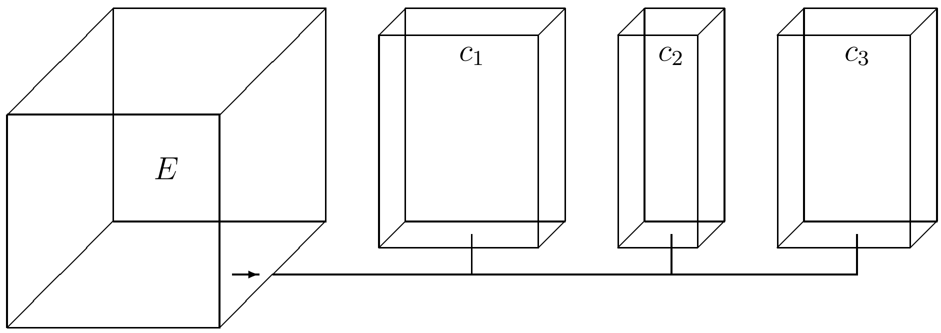
Esempio 3.3.1 (Soluzioni) *Si consideri il problema di bancarotta* $(15; 3, 6, 7, 14)$.
$PROP = (1.5, 3, 3.5, 7)$
$CEA = (3, 4, 4, 4)$
$CEL = (0, 2, 3, 10)$ ♢

$PROP$ è la soluzione più intuitiva, CEA è quella che più protegge i piccoli creditori, CEL è quella più favorevole ai grossi creditori.

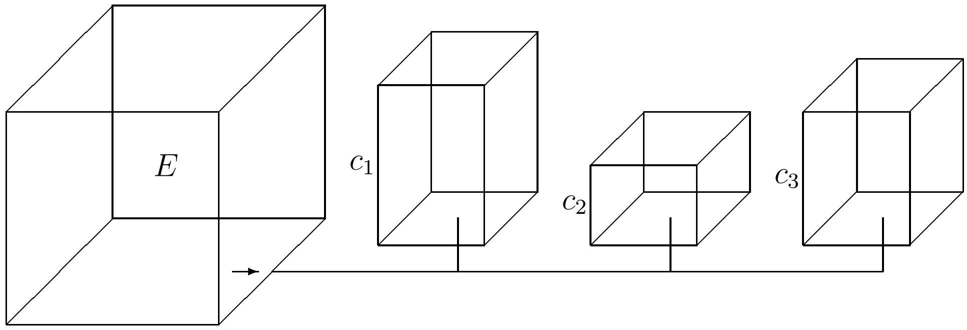
<u>Interpretazione dei vasi comunicanti</u>

Dato un problema di bancarotta è possibile ottenere le soluzioni $PROP$, CEA e CEL da opportune situazioni di vasi comunicanti.

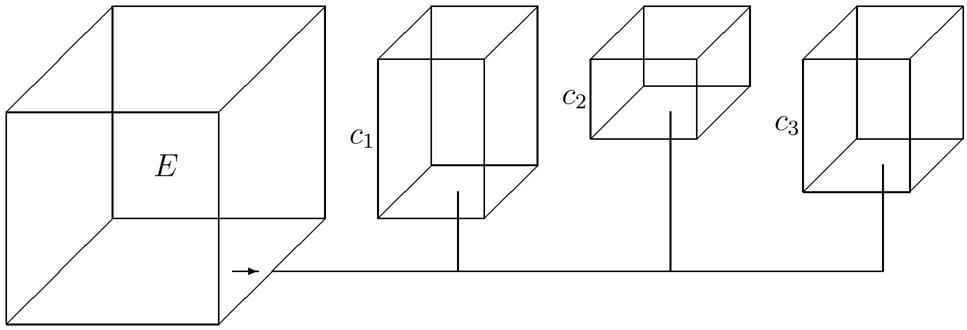
$PROP$ corrisponde a vasi di sezione $c_i, i \in N$, con le basi inferiori allo stesso livello.



CEA corrisponde a vasi di sezione unitaria e di altezza $c_i, i \in N$, con le basi inferiori allo stesso livello.



CEL corrisponde a vasi di sezione unitaria e di altezza $c_i, i \in N$, con le basi superiori allo stesso livello.



Dato un problema di bancarotta si possono definire due giochi TU (Aumann e Maschler, 1985 - Curiel, Maschler e Tijs, 1987 - Herrero e Villar, 2001), uno pessimistico e uno ottimistico; per entrambi l'insieme dei giocatori è N mentre la funzione caratteristica del gioco pessimistico è:

$$v_P(S) = max\left(0, E - \sum_{i \in N \setminus S} c_i\right) \qquad S \subseteq N$$

e quella del gioco ottimistico è:

$$v_O(S) = min\left(E, \sum_{i \in S} c_i\right) \qquad S \subseteq N$$

Nel gioco pessimistico se alcuni giocatori vogliono formare una coalizione, devono soddisfare le richieste degli altri, ovviamente senza rimetterci, mentre nel gioco ottimistico se alcuni giocatori formano una coalizione hanno diritto a soddisfare le loro richieste, col massimo dell'intero capitale.

Il gioco ottimistico, a differenza di quello pessimistico, non è realistico, come mostra il seguente semplice esempio.

Esempio 3.3.2 (Inconsistenza del gioco ottimistico) *Si consideri il problema di bancarotta* $(5; 3, 4)$. *I due giochi sono definiti rispettivamente da:*

$$v_O(1) = 3; v_O(2) = 4; v_O(12) = 5$$
$$v_P(1) = 1; v_P(2) = 2; v_P(12) = 5$$

per cui il gioco ottimistico dice che i due giocatori separatamente possono ottenere rispettivamente 3 *e* 4*, mentre il capitale è solo* 5. ♢

Il nucleo del gioco pessimistico coincide con l'insieme delle soluzioni ammissibili del problema di bancarotta, cioè:

$$x \in core(v_P) \iff \begin{cases} \sum_{i \in N} x_i = E \\ 0 \leq x_i \leq c_i, \qquad i \in N \end{cases}$$

$\Rightarrow$ La prima è la condizione di efficienza. Per la seconda condizione per ogni $i \in N$ si ha $x_i \geq v_P(i) \geq 0$ e $E - x_i = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j \geq v_P(N \setminus \{i\}) \geq E - c_i \Rightarrow x_i \leq c_i$.

$\Leftarrow$ La condizione di efficienza è ovviamente soddisfatta. Per ogni $S \subset N$ si hanno due casi:

1) se $v_P(S) = 0 \leq \sum_{i \in S} x_i$;

2) se $v_P(S) = E - \sum_{i \in N \setminus S} c_i \leq E - \sum_{i \in N \setminus S} x_i = \sum_{i \in S} x_i$.

3.3.2 Fixed tree game

Un insieme di agenti è collegato alla sorgente di un servizio tramite una fissata connessione ad albero; ciascun agente corrisponde ad un vertice dell'albero. Il servizio è pagato in base all'utilizzo ma restano i costi di manutenzione. E' possibile associare al problema un gioco TU che ha come giocatori l'insieme di agenti $N = \{1, ..., n\}$ e come funzione caratteristica:

$$c(S) = \min_{T \supseteq S} \left\{ \sum_{i \in T} c_i \right\} \qquad S \subseteq N$$

dove c_i è il costo di manutenzione dell'unico arco entrante nel vertice associato al giocatore i e T è una componente connessa dell'albero contenente la sorgente.

Il nucleo di un fixed tree game è dato dall'insieme delle allocazioni che si ottengono ripartendo il costo di ciascun arco solo tra i giocatori della componente connessa non contenente la sorgente che si ottiene eliminando l'arco stesso.

3.3.3 Weighted majority game

I rappresentanti in un consiglio di amministrazione vogliono valutare la loro situazione ed esaminare le possibili alleanze. Formalmente un problema di maggioranza pesata è una tripla $\mathcal{W} = (N, w, q)$, dove $N = \{1, ..., n\}$ è l'insieme dei consiglieri, $w = \{w_1, ..., w_n\}$ è il vettore dei "pesi, ad esempio il numero di azioni e q è la quota di maggioranza, cioè il numero di voti necessari per approvare una mozione, con $q < \sum_{i \in N} w_i$; per semplicità si indica come $(q; w_1, ..., w_n)$. E' possibile associare al problema un gioco TU semplice 0-1 dove l'insieme dei giocatori è N e la funzione caratteristica è:

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sum_{i \in S} w_i > q \quad S \text{ vincente} \\ 0 & \text{se } \sum_{i \in S} w_i \leq q \quad S \text{ perdente} \end{cases}$$

Il gioco risulta monotono e spesso si suppone anche $q \geq \frac{1}{2} \sum_{i \in N} w_i$ in modo che se S è vincente $N \setminus S$ sia perdente.

Questi giochi sono più utilizzati nei consigli di amministrazione che in politica, in quanto nel secondo caso la formazione di una maggioranza è legata non solo ai numeri, ma anche alla collocazione dei partiti.

Esempio 3.3.3 (Consiglio di sicurezza dell'ONU) *Il Consiglio di sicurezza dell'ONU è composto da cinque membri permanenti con diritto di veto e dieci membri eletti. Un provvedimento è approvato se riceve almeno 9 voti e nessun veto. Questo problema può essere rappresentato come un problema di maggioranza pesata in cui* $w_i = 1$ *se* i *è un membro eletto e* $w_i = 7$ *se* i *è un membro permanente e* $q = 38$. ♢

Un gioco di maggioranza pesata ha solitamente nucleo vuoto, salvo nel caso in cui esistano giocatori di veto; un giocatore i è detto di veto se $v(S) = 0$ se $i \notin S$. Detto V l'insieme dei giocatori di veto e data una allocazione x tale che $\sum_{i \in N} x_i = 1, x_i \geq 0, i \in N$ si ha:

$$x \in core(v) \iff \sum_{i \in V} x_i = 1$$

⇒ E' sufficiente verificare che $x_i = 0, i \in N \setminus V$.
$i \in N \setminus V \Rightarrow v(N \setminus \{i\}) = 1$ (altrimenti i sarebbe di veto) per cui $\sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j = 1 \Rightarrow x_i = 0$.

⇐ Per ogni $S \subset N$ si hanno due casi:

1) $v(S) = 0 \leq \sum_{i \in S} x_i$;

2) $v(S) = 1 \Rightarrow V \subseteq S \Rightarrow \sum_{i \in S} x_i \geq \sum_{i \in V} x_i = 1$.

Osservazione 3.3.1

- *Se il giocatore* i *è di veto non è vero che* $i \in S \Rightarrow v(S) = 1$.

3.3.4 Sequencing game

Alcuni agenti attendono un servizio e ogni agente conosce il proprio tempo di servizio e il costo per unità di tempo. Due agenti adiacenti possono scambiarsi di posto se questo è vantaggioso. Formalmente un problema di sequenziamento è una quadrupla $\mathcal{S} = (N, \sigma_0, \alpha, s)$ dove $N = \{1, ..., n\}$ è l'insieme degli agenti, σ_0 è una permutazione che definisce l'ordine iniziale, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ è il vettore dei costi per unità di tempo e $s = (s_1, ..., s_n)$ è il vettore dei tempi di servizio. Dato un ordinamento σ si può definire il costo C_σ come la somma dei costi degli agenti, ciascuno dei quali è dato dal tempo trascorso per il costo unitario, cioè:

$$C_\sigma = \sum_{i \in N} \alpha_i \left(\sum_{j \in P(\sigma, i)} s_j + s_i \right)$$

dove $P(\sigma, i)$ è l'insieme degli agenti che precedono i nell'ordinamento σ. Il problema è determinare l'ordinamento ottimale σ^* degli agenti.

Smith (1956) ha dimostrato che l'ordinamento ottimale si può ottenere ordinando gli agenti secondo indici di urgenza debolmente decrescenti, dove l'urgenza è $u_i = \frac{\alpha_i}{s_i}$, $i \in N$.

Esempio 3.3.4 (Problema di sequenziamento) *Si consideri il problema di sequenziamento definito da* $N = \{1, 2, 3\}, \sigma_0 = (1, 2, 3), \alpha = (5, 9, 8), s = (5, 3, 4)$*; il costo iniziale è* $C_{\sigma_0} = 25 + 72 + 96 = 193$ *e gli indici di urgenza sono* $u = (1, 3, 2)$*, per cui* $\sigma^* = (2, 3, 1)$ *con costo* $C_{\sigma^*} = 27 + 56 + 60 = 143$. ♢

E' possibile associare al problema un gioco TU dove l'insieme dei giocatori è N e la funzione caratteristica è definita come segue. Una coalizione $T \subseteq N$ è detta connessa secondo σ se per ogni $i, j \in T$ e $k \in N$ si ha $\sigma(i) < \sigma(k) < \sigma(j) \Rightarrow k \in T$. Scambiando due giocatori i, j la variazione di costo è $\alpha_j s_i - \alpha_i s_j$; la variazione è positiva se e solo se $u_i < u_j$; se la variazione è negativa non si ha lo scambio. Il guadagno di uno scambio è $g_{ij} = max\{0, \alpha_j s_i - \alpha_i s_j\}$, quindi il guadagno di una coalizione T connessa secondo σ è:

$$v(T) = \sum_{j \in T} \sum_{i \in P(\sigma,j) \cap T} g_{ij}$$

In generale data una coalizione $S \subseteq N$, l'ordine σ induce una partizione in componenti connesse, S/σ, per cui si ha:

$$v(S) = \sum_{T \in S/\sigma} v(T) \qquad S \subset N$$

Esempio 3.3.5 (Sequencing game) *Riferendosi all'Esempio 3.3.4 la funzione caratteristica è:*

S	1	2	3	12	13	23	123
$v(S)$	0	0	0	30	0	0	50

$v(23) = 0$ *poichè lo scambio produrrebbe una perdita, in quanto* $u_2 > u_3$*; invece* $v(13) = 0$ *perchè la coalizione non è connessa e i giocatori* 1 *e* 3 *non possono scambiarsi anche se otterrebbero un guadagno di 20 e il giocatore* 2 *avrebbe un guadagno, poichè il tempo di servizio di* 3 *è 4 e quello di* 1 *è 5.* ♢

Questi giochi hanno nucleo non vuoto e una allocazione interessante è la Equal Gain Splitting Rule (*EGS* - Curiel , Pederzoli e Tijs, 1989), che divide in parti uguali il guadagno di ogni scambio tra i due giocatori coinvolti; cioè:

$$EGS_i = \frac{1}{2} \sum_{k \in P(\sigma,i)} g_{ki} + \frac{1}{2} \sum_{j: i \in P(\sigma,j)} g_{ij} \qquad \forall i \in N$$

Esempio 3.3.6 (EGS-Rule) *Riferendosi all'Esempio 3.3.4 i guadagni* g_{ij} *sono:*

ij	12	13	21	23	31	32
g_{ij}	30	20	0	0	0	12

e conseguentemente

$$EGS_1 = \frac{1}{2}(g_{12} + g_{13}) = 25$$
$$EGS_2 = \frac{1}{2}g_{12} + \frac{1}{2}g_{23} = 15$$
$$EGS_3 = \frac{1}{2}(g_{13} + g_{23}) = 10$$

♢

Osservazione 3.3.2

- *La soluzione EGS non è simmetrica per i giocatori* 1 *e* 2 *che sono simmetrici per il gioco ma non per il problema associato; infatti* 1 *può scambiarsi vantaggiosamente sia con* 2 *che con* 3*, mentre* 2 *può scambiarsi vantaggiosamente solo con* 1*; quindi la EGS tiene conto del ruolo effettivo di ciascun giocatore.*

- g_{21}, g_{31}, g_{32} *non vengono utilizzati perchè l'ordine iniziale dato non permette questi scambi.*

- *Una variante è* $EGS_i^\varepsilon = \varepsilon \sum_{k \in P(\sigma,i)} g_{ki} + (1-\varepsilon) \sum_{j: i \in P(\sigma,j)} g_{ij}, \forall i \in N, \forall \varepsilon \in [0,1]$.

3.3.5 Production game

Alcuni agenti possiedono le risorse utilizzate in un processo produttivo, che vogliono utilizzare in modo da massimizzare il valore dei beni prodotti. Formalmente un problema di produzione è una quadrupla $\mathcal{P} = (N, A, (b^i)_{i \in N}, c)$ dove $N = \{1, ..., n\}$ è l'insieme degli agenti, A è la matrice tecnologica del processo produttivo, b^i è il vettore delle risorse dell'agente i e c è il vettore dei prezzi dei beni prodotti.

E' possibile associare al problema un gioco TU dove l'insieme dei giocatori è N e la funzione caratteristica è definita come:

$$v(S) = max\ \{c^T z | Az \leq b^S, z \geq 0\} \qquad S \subseteq N$$

dove $b^S = \sum_{i \in S} b^i$ rappresenta le risorse possedute dalla coalizione S.

Il nucleo di un gioco di produzione contiene le imputazioni x tali che $x_i = b^{iT} u^*$ dove u^* è una soluzione ottimale del duale del problema di produzione:

$$\begin{array}{ll} max & c^T z \\ s.t. & Az \leq b^N \\ & z \geq 0 \end{array}$$

Osservazione 3.3.3

- *Il risultato precedente può essere esteso a tutti i giochi originati da un problema lineare (Teorema di Owen, 1975).*

3.3.6 Assignment game

Gli agenti sono divisi in due gruppi, i venditori e i compratori; ciascun venditore possiede un solo oggetto, di cui conosce la propria valutazione, e ogni compratore può acquistare un solo oggetto e conosce la propria valutazione di ogni oggetto; se un venditore ha più di un oggetto da vendere o un compratore è interessato a più oggetti si considerano più copie con identiche valutazioni. E' opportuno precisare che si tratta di oggetti che non hanno un prezzo di mercato, ma il prezzo dipende dalle valutazioni e dalle capacità di contrattazione. L'obiettivo dei giocatori di entrambi i gruppi è massimizzare il guadagno, rispetto alle proprie valutazioni. Formalmente un problema di assegnazione è una quadrupla $\mathcal{A} = (N^v, N^c, A, B)$ dove $N^v = \{1, ..., n^v\}$ è l'insieme dei venditori, $N^c = \{1, ..., n^c\}$ è l'insieme dei compratori, A è un vettore dove a_j è la valutazione che il venditore $j \in N^v$ attribuisce al proprio oggetto, B è una matrice dove b_{ij} è la valutazione che il compratore $i \in N^c$ attribuisce all'oggetto offerto dal venditore $j \in N^v$.

E' possibile associare al problema un gioco TU dove l'insieme dei giocatori è $N = N^v \cup N^c$ e la funzione caratteristica v è definita come segue:

- Se un venditore j^* e un compratore i^* formano una coalizione allora:

$$v(i^*j^*) = c_{i^*j^*} = \begin{cases} b_{i^*j^*} - a_{j^*} & \text{se } b_{i^*j^*} - a_{j^*} \geq 0 \\ 0 & \text{se } b_{i^*j^*} - a_{j^*} < 0 \end{cases}$$

- Se una coalizione S contiene più compratori che venditori, detto $i(j) \in S \cap N^c$ il compratore dell'oggetto offerto dal venditore $j \in S \cap N^v$, si ha:

$$v(S) = max \sum_{j \in S \cap N^v} c_{i(j),j}$$

- Se una coalizione S contiene più venditori che compratori, detto $j(i) \in S \cap N^v$ il venditore dell'oggetto acquistato dal compratore $i \in S \cap N^c$, si ha:

$$v(S) = max \sum_{i \in S \cap N^c} c_{i,j(i)}$$

L'insieme dei valori c_{ij} definisce un problema di assegnazione che può scriversi come:

$$\begin{array}{lll} max & z = \sum_{i \in N^c, j \in N^v} c_{ij} x_{ij} & \\ s.t. & \sum_{i \in N^c} x_{ij} \leq 1 & \forall\, j \in N^v \\ & \sum_{j \in N^v} x_{ij} \leq 1 & \forall\, i \in N^c \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} & \forall\, i \in N^c, j \in N^v \end{array}$$

dove $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ e } j \text{ si accordano} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$.

In accordo al teorema di Owen, il nucleo di un gioco di assegnazione contiene le imputazioni ottenute da una soluzione ottimale del duale (Shapley e Shubik, 1972):

$$\begin{array}{lll} min & w = \sum_{j \in N^v} y_j^v + \sum_{i \in N^c} y_i^c & \\ s.t. & y_j^v + y_i^c \geq c_{ij} & \forall\, j \in N^v, \forall\, i \in N^c \end{array}$$

Osservazione 3.3.4

- *Si utilizzano solo le soluzioni ottimali duali aventi le componenti non negative per rispettare le condizioni di razionalità individuale. Infatti se* $(\bar{y}_1^v, ..., \bar{y}_{n^v}^v, \bar{y}_1^c, ..., \bar{y}_{n^c}^c)$ *è una soluzione ottimale e supponendo, senza perdita di generalità, che corrisponda all'assegnazione di k oggetti* ($k \leq min\ \{n, m\}$) *tra le coppie venditore-compratore 1-1, 2-2, ..., k-k, allora è ottimale anche* $(\bar{y}_1^v + \alpha_1, ..., \bar{y}_k^v + \alpha_k, ..., \bar{y}_{n^v}^v, \bar{y}_1^c - \alpha_1, ..., \bar{y}_k^c - \alpha_k, ..., \bar{y}_{n^c}^c),\ \forall\ (\alpha_1, ..., \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$.

Esempio 3.3.7 (Gioco di assegnazione) *Si supponga di avere tre giocatori, dove il giocatore 1 è un venditore che valuta il proprio oggetto* $a_1 = 10$ *e i giocatori 2 e 3 sono compratori le cui valutazioni sono rispettivamente* $b_{21} = 12, b_{31} = 15$. *La funzione caratteristica del gioco è:*

$$v(1) = v(2) = v(3) = v(23) = 0; v(12) = 2; v(13) = v(N) = 5$$

Il nucleo è l'insieme delle imputazioni (x_1, x_2, x_3) *con* $x_1 = \alpha, x_2 = 0, x_3 = 5 - \alpha, 2 \leq \alpha \leq 5$. *Questo vuol dire che l'oggetto non viene venduto al giocatore 2 e il payoff dei giocatori 1 e 3 dipende da come si accordano, ma il prezzo deve garantire al giocatore 1 un'utilità di almeno* 2 *unità. In altre parole il prezzo di vendita deve essere almeno 12, altrimenti il giocatore 1 può accordarsi col giocatore 2, ma non più di 15, altrimenti il giocatore 3 si ritira. Si noti infine che se la valutazione del giocatore 2 fosse* $\bar{b}_{21} = 15$ *allora l'unica allocazione nel nucleo sarebbe* $(5, 0, 0)$ *cioè il prezzo di vendita sarebbe esattamente 15. Quest'esempio conferma la ben nota legge della domanda e dell'offerta.* $\diamondsuit$

Osservazione 3.3.5

- *L'esempio 3.3.7 permette alcune considerazioni di carattere economico.*
  1. *La legge dell'equilibrio tra domanda e offerta dice che il prezzo deve far síche la domanda sia uguale all'offerta, per cui se il prezzo dell'oggetto fosse inferiore a 12 vi sarebbero due acquirenti mentre se il prezzo fosse superiore a 15 non vi sarebbero acquirenti.*
  2. *Le leggi economiche non escludono, come il nucleo, un'utilità positiva per il giocatore 2; infatti il giocatore 1 potrebbe offrire al giocatore 2 parte della sua utilità in cambio di un'offerta maggiore per far síche il prezzo pagato dal giocatore 3 sia più alto oppure il giocatore 3 potrebbe offrire al giocatore 2 parte della sua utilità in cambio del suo ritiro per far síche il prezzo pagato al giocatore 1 sia più basso.*

Capitolo 4

Soluzioni puntuali di un gioco TU

Le soluzioni puntuali prendono frequentemente il nome di *indici di potere* o *valori* perchè permettono di identificare il "potere" di ciascun giocatore all'interno del gioco. In generale il termine "indice di potere" si usa per i giochi semplici, mentre per un gioco qualsiasi si preferisce il termine "valore".

4.1 Valore di Shapley (1953)

È un concetto di soluzione che si basa sul valore che ogni giocatore è in grado di aggiungere alle possibili coalizioni, cioè sul suo *contributo marginale*.

Definizione 4.1.1 *Si chiama valore di Shapley il vettore $\phi(v)$ la cui componente ϕ_i è il contributo marginale medio del giocatore i rispetto alle possibili permutazioni dei giocatori, cioè:*

$$\phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} [v(P(\pi, i)) \cup \{i\}) - v(P(\pi, i))]$$

dove $n = |N|$, π è una permutazione di N e $P(\pi, i)$ è l'insieme dei giocatori che precedono i nella permutazione π.

Il valore di Shapley per un gioco cooperativo esiste ed è unico.

Se il gioco è superadditivo (subadditivo per un cost game) il valore di Shapley è un'imputazione in quanto verifica:

$$\begin{aligned} &\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N) \\ &\phi_i(v) \geq v(i) \qquad\qquad \forall i \in N \end{aligned}$$

ma non è necessariamente un elemento del nucleo, visto che questo può essere vuoto.

Se il gioco è convesso (concavo per un cost game) il valore di Shapley è un elemento del nucleo.

Esempio 4.1.1 (Gioco di assegnazione) *Riferendosi all'Esempio 3.3.7, dove* $v(1) = v(2) = v(3) = v(23) = 0; v(12) = 2; v(13) = v(123) = 5$ *il valore di Shapley value è dato da:*

	Contributi marginali		
Permutazioni	*Giocatore* 1	*Giocatore* 2	*Giocatore* 3
1 2 3	$v(1) - v(\emptyset) = 0$	$v(12) - v(1) = 2$	$v(123) - v(12) = 3$
1 3 2	$v(1) - v(\emptyset) = 0$	$v(123) - v(13) = 0$	$v(13) - v(1) = 5$
2 1 3	$v(12) - v(2) = 2$	$v(2) - v(\emptyset) = 0$	$v(123) - v(12) = 3$
2 3 1	$v(123) - v(23) = 5$	$v(2) - v(\emptyset) = 0$	$v(23) - v(2) = 0$
3 1 2	$v(13) - v(3) = 5$	$v(123) - v(13) = 0$	$v(3) - v(\emptyset) = 0$
3 2 1	$v(123) - v(23) = 5$	$v(23) - v(3) = 0$	$v(3) - v(\emptyset) = 0$
ϕ_i	$\frac{17}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{11}{6}$

Il valore di Shapley riflette il valore economico del giocatore 2. ♢

4.1.1 Assiomi di Shapley

Il valore di Shapley può essere caratterizzato in maniera assiomatica come l'unico vettore efficiente ϕ che soddisfa i seguenti assiomi:

1. Simmetria
   Se due giocatori i, j sono simmetrici, cioè vale la proprietà $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}), \forall\ S \subseteq N \setminus \{i, j\}$ allora $\phi_i(v) = \phi_j(v)$.

2. Dummy player
   Sia i un giocatore fittizio, cioè che ad ogni coalizione aggiunge solo il suo valore $v(i)$:
   $$v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(i) \quad \forall\ S \subseteq N \setminus \{i\}$$
   Il valore di Shapley del giocatore i è il suo valore, cioè $\phi_i(v) = v(i)$.

3. Additività o indipendenza (assioma controverso)
   Dati due giochi u e v, sia $(u + v)$ il gioco somma definito da:
   $$(u + v)(S) = u(S) + v(S), \quad \forall\ S \subseteq N$$
   Il valore di Shapley del gioco somma è dato dalla somma dei valori di Shapley, cioè $\phi_i(u + v) = \phi_i(u) + \phi_i(v), \forall\ i \in N$.

Esempio 4.1.2 (Giocatori simmetrici e giocatore fittizio) *Sia dato il gioco* $G = (N, v)$ *dove:*

$$N = \{1, 2, 3\}$$
$$v(1) = v(2) = v(3) = 1; v(12) = 4; v(13) = v(23) = 2; v(N) = 5$$

I giocatori 1 e 2 sono simmetrici e il giocatore 3 è fittizio, allora $\phi_3(v) = v(3) = 1$ *e* $\phi_1(v) = \phi_2(v) = \frac{1}{2}(v(N) - v(3)) = 2$ *e quindi* $\phi(v) = (2, 2, 1)$. ♢

Osservazione 4.1.1

- *L'assioma di simmetria può essere sostituito dall'assioma di* anonimato*:*
  Dato un gioco v e una permutazione dei giocatori π sia u il gioco definito da:

$$u(\pi(S)) = v(S) \quad \forall\ S \subseteq N$$

  Il valore di Shapley del gioco ottenuto permutando i giocatori è dato dalla permutazione dei valori di Shapley, cioè $\phi_{\pi(i)}(u) = \phi_i(v)$.

- *L'assioma di dummy player può essere sostituito dall'assioma di* null player*:*
  Un giocatore $i \in N$ è un null player se $v(S \cup \{i\}) = v(S), \forall\ S \subseteq N \setminus \{i\}$; allora $\phi_i(v) = 0$.
  Si può notare che $v(i) = v(\emptyset \cup \{i\}) = v(\emptyset) = 0$ e quindi ancora $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(i), \forall\ S \subseteq N \setminus \{i\}$.

4.1.2 Calcolo del valore di Shapley

Il valore di Shapley risulta molto complesso da calcolare.

Applicando la definizione è necessario determinare i contributi marginali dei giocatori in tutte le possibili coalizioni ordinate, che sono $n!$; nel caso di 10 giocatori è necessario considerare per ogni giocatore $10! = 3.628.800$ permutazioni.

Una piccola semplificazione si può ottenere considerando tutte le possibili coalizioni non vuote, che sono $2^n - 1$, e per ciascuna considerare ogni giocatore come l'ultimo arrivato e quindi "pesare" il suo contributo marginale con le permutazioni degli altri giocatori della coalizione e dei giocatori non facenti parte della coalizione; in questo modo si ottiene la seguente espressione per il valore di Shapley:

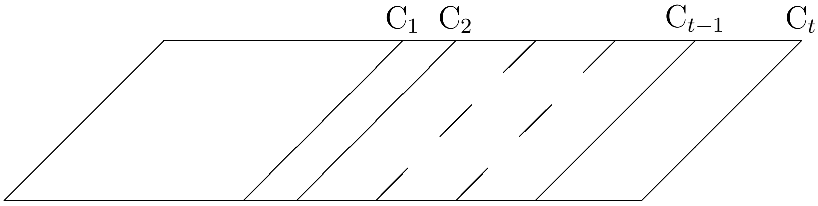
$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} [v(S) - v(S \setminus \{i\})]$$

Nel caso di 10 giocatori è necessario considerare $2^{10} - 1 = 1.023$ coalizioni.

Per alcuni giochi è possibile determinare il valore di Shapley molto più semplicemente, sfruttando alcune caratteristiche del gioco.

Gioco dell'aeroporto (Airport game - Littlechild e Thompson, 1977)

Sia dato un aeroporto in cui atterrano differenti tipi di aerei che richiedono una pista di lunghezza differente a seconda delle loro caratteristiche; si vuole determinare come ripartire il costo di costruzione e manutenzione della pista tra gli aerei che la utilizzano. Gli aerei sono raggruppati, a seconda della lunghezza di pista necessaria, in t sottoinsiemi disgiunti $N_1, \ldots, N_t$ in modo che gli aerei del sottoinsieme N_i richiedono una pista di costo C_i con $C_i < C_{i+1}$.



Definendo il gioco assegnando ad ogni coalizione il costo della pista necessaria all'aereo più grosso della coalizione, cioè:

$$v(S) = C_{j(S)}$$

dove $j(S) = max\ \{i|S \cap N_i \neq \emptyset\}$. Si può dimostrare che il valore di Shapley di ogni aereo corrisponde alla ripartizione dei costi ottenuta nel seguente modo:

- Il costo del primo tratto di pista C_1 è diviso tra tutti gli aerei, poichè tutti lo utilizzano;
- Il costo del secondo tratto di pista $C_2 - C_1$ è diviso tra gli aerei dei sottoinsiemi $N_2, \ldots, N_t$ che sono quelli che lo utilizzano;
- Il costo dell'ultimo tratto di pista $C_t - C_{t-1}$ che è diviso tra gli aerei del sottoinsieme N_t che sono gli unici che lo utilizzano.

E' facile vedere che questo criterio è facilmente applicabile anche nel caso di molti aerei.

Esempio 4.1.3 (Gioco dell'aeroporto)

$$\begin{array}{l} N_1 = \{1,2,3\}; N_2 = \{4,5,6,7\}; N_3 = \{8,9,10\} \\ C_1 = 20; C_2 = 27; C_3 = 33 \\ \phi_1 = \frac{20}{10} = 2 \\ \phi_2 = \frac{20}{10} + \frac{27-20}{7} = 3 \\ \phi_3 = \frac{20}{10} + \frac{27-20}{7} + \frac{33-27}{3} = 5 \end{array}$$

◇

La verifica utilizza gli assiomi di Shapley (Littlechild e Owen, 1973).
Si definiscono t giochi $v_1, \ldots, v_t$ con il gioco v_i relativo al tratto di pista i in cui si ha:

$$v_i(S) = \begin{cases} C_i - C_{i-1} & se\ i \leq j(S) \\ 0 & se\ i > j(S) \end{cases}$$

dove $C_0 = 0$.
A questo punto si osserva che:

1. gli aerei dei sottoinsiemi $N_1, \ldots, N_{i-1}$ che non utilizzano il tratto di pista i sono dummy per il gioco v_i, per cui il loro valore di Shapley per questo gioco è nullo;
2. gli aerei dei sottoinsiemi $N_i, \ldots, N_t$ che utilizzano il tratto di pista i sono simmetrici per il gioco v_i, per cui il loro valore di Shapley per questo gioco è uguale a $\frac{C_i - C_{i-1}}{|N_i \cup \cdots \cup N_t|}$;
3. il gioco v è dato dalla somma dei giochi v_i, per cui il valore di Shapley di v è dato dalla somma dei valori di Shapley dei giochi v_i.

4.1.3 Un'applicazione del valore di Shapley

Esempio 4.1.4 (Consiglio dell'UE 1958-1973) *Il valore di Shapley permette di evidenziare un difetto nei pesi assegnati nel Consiglio dell'UE del 1958. La quota di maggioranza nel 1958 era 12 su 17 (70%) e nel 1973 era 41 su 58 (70%).*

	1958			1973		
Paesi	*Peso*	*%*	*Shapley*	*Peso*	*%*	*Shapley*
Francia	*4*	*23.53*	*0.233*	*10*	*17.24*	*0.179*
Germania	*4*	*23.53*	*0.233*	*10*	*17.24*	*0.179*
Italia	*4*	*23.53*	*0.233*	*10*	*17.24*	*0.179*
Belgio	*2*	*11.76*	*0.150*	*5*	*8.62*	*0.081*
Paesi Bassi	*2*	*11.76*	*0.150*	*5*	*8.62*	*0.081*
Lussemburgo	*1*	*5.88*	**0.000**	*2*	*3.45*	*0.010*
Regno Unito	-	-	-	*10*	*17.24*	*0.179*
Danimarca	-	-	-	*3*	*5.17*	*0.057*
Irlanda	-	-	-	*3*	*5.17*	*0.057*
Totale	*17*	*100.00*	*1.000*	*58*	*100.00*	*1.000*

Il Lussemburgo, pur riducendo il suo peso percentuale, ha perso il ruolo di dummy player. ♢

4.2 Nucleolo (1969)

Un altro concetto di soluzione puntuale è il nucleolo di Schmeidler, che si basa sull'idea di minimizzare il massimo "malcontento".

Definizione 4.2.1 *Dato un gioco v, sia S una coalizione e x una possibile ripartizione del valore del gioco; si dice rimpianto o eccesso di S rispetto ad x la quantità:*

$$e(S,x) = v(S) - x(S)$$

Nel caso di un cost game il rimpianto è $x(S) - c(S)$.

Osservazione 4.2.1

- *Nella definizione precedente x è una ripartizione del valore del gioco in quanto deve soddisfare solo l'ipotesi di efficienza; in questo caso talvolta si usano i termini preimputazione e prenucleolo per indicare che non si tiene conto della razionalità individuale.*

E' possibile definire un vettore $\vartheta(x) \in \mathbb{R}^{2^n}$ nel seguente modo:

$$\vartheta_1(x) = max\ \{e(S,x) | S \subset N\} = e(S_1, x)$$
$$\vartheta_i(x) = max\ \{e(S,x) | S \subset N, S \neq S_j, j = 1, \ldots, i-1\} = e(S_i, x) \qquad i = 2, \ldots, 2^n$$

Le componenti di $\vartheta(x)$ sono i rimpianti generati da x al variare di S, in ordine debolmente decrescente.

Esempio 4.2.1 (Vettore degli eccessi) *Sia dato il seguente gioco:*

$$N = \{1, 2, 3\}$$
$$v(1) = v(2) = v(3) = 0; v(12) = 2; v(13) = v(23) = 3; v(N) = 5$$

Data la ripartizione $x = (3, 1, 1)$ *si ha:*

$$e(1, x) = -3; e(2, x) = -1; e(3, x) = -1; e(12, x) = -2; e(13, x) = -1; e(23, x) = 1; e(N, x) = 0$$

e quindi:

$$\vartheta(x) = (1, 0, -1, -1, -1, -2, -3)$$ ♢

Definizione 4.2.2 *Dati due vettori* $x, y \in \mathbb{R}^n$*, si dice che* x *è lessicograficamente minore di* y *e si indica con* $x <_L y$*, se esiste* $i \geq 1$ *per cui:*

$$\begin{aligned} x_j &= y_j \qquad j < i \\ x_i &< y_i \end{aligned}$$

Definizione 4.2.3 *Dato un gioco* v *si dice nucleolo del gioco il vettore* $\nu(X)$ *che genera il minimo, secondo l'ordine lessicografico, dei vettori* $\vartheta(x)$ *al variare di* x *nell'insieme* X *delle possibili ripartizioni.*

Osservazione 4.2.2

- *Il nucleolo è un elemento del nucleo se questo è non vuoto, per cui costituisce un concetto di soluzione per i giochi a nucleo vuoto, ma permette anche di "scegliere" un elemento del nucleo.*

Esempio 4.2.2 (Ordine lessicografico) *Sia dato il seguente gioco:*

$$N = \{1, 2\}$$
$$v(1) = 1; v(2) = 3; v(12) = 8$$

Dati $x = (6, 2)$ *e* $y = (3, 5)$ *si ha:*

$$e(1, x) = -5; e(2, x) = 1; e(12, x) = 0$$
$$e(1, y) = -2; e(2, y) = -2; e(12, y) = 0$$

e quindi $\vartheta(x) = (1, 0, -5)$ *e* $\vartheta(y) = (0, -2, -2)$ *per cui* $\vartheta(y) <_L \vartheta(x)$*.*
Si può verificare che $y = \nu(X)$*.* ♢

Proprietà

Se X è non vuoto, compatto e convesso allora $\nu(X)$ esiste ed è unico.

Capitolo 5

Allocazione di costi

Il problema dell'allocazione di costi costituisce una delle prime applicazioni della Teoria dei Giochi. I primi esempi di allocazione di costi risalgono agli anni '30 col problema della Tennessee Valley Authority (Ransmeier, 1942 - Straffin e Heaney, 1986).

Il problema nasce quando è necessario determinare una ripartizione dei costi di un progetto tra i diversi utenti, tenendo conto del diverso ruolo e dei differenti interessi. Esiste ovviamente il problema corrispondente di allocazione di profitti, per il quale valgono analoghe considerazioni.

I concetti di soluzione precedentemente esposti, in particolare valore di Shapley e nucleolo, costituiscono differenti possibili soluzioni del problema, ma esiste una serie di concetti di soluzione o metodi di allocazione che hanno una validità generale, ma che sono stati sviluppati per questo problema e si basano sui costi separabili.

5.1 Metodi dei costi separabili

Definizione 5.1.1

- *Dato un gioco di costi o cost game c si chiama costo separabile del giocatore i il suo contributo marginale o costo marginale:*

$$m_i = c(N) - c(N \setminus \{i\})$$

- *Se la somma dei costi separabili dei giocatori è minore del costo del gioco si chiama costo non separabile del gioco la differenza tra i due valori, cioè:*

$$g(N) = c(N) - \sum_{i \in N} m_i$$

I vari metodi si differenziano per come viene ripartito il costo non separabile.

5.1.1 Equa ripartizione (ECA)

Il costo non separabile viene ripartito in parti uguali tra i giocatori. In questo modo il giocatore i deve pagare il costo:

$$ECA_i = m_i + \frac{1}{n} g(N)$$

5.1.2 Costi di alternativa risparmiati (ACA)

Il costo non separabile viene ripartito tra i giocatori proporzionalmente al risparmio ottenuto da ciascuno per aver pagato il proprio costo separabile invece del costo che avrebbe pagato da solo; in altre parole definendo il risparmio del giocatore i come:

$$r_i = c(i) - m_i$$

si ha:

$$ACA_i = m_i + \frac{r_i}{\sum_{j \in N} r_j} g(N)$$

5.1.3 Cost Gap (CGA)

Il costo non separabile viene ripartito tra i giocatori proporzionalmente al migliore (minimo) massimo contributo che ciascuno è disposto a pagare facendo parte di una coalizione, cioè definendo il costo non separabile di una coalizione S come:

$$g(S) = c(S) - \sum_{i \in S} m_i$$

si ha che il giocatore i è disposto a pagare al più tutto il minimo costo non separabile delle coalizioni di cui può far parte, per cui ponendo:

$$g_i = min\ \{g(S) | i \in S\}$$

si ha:

$$CGA_i = m_i + \frac{g_i}{\sum_{j \in N} g_j} g(N)$$

Osservazione 5.1.1

- *Esiste un altro concetto di soluzione equivalente al CGA, il valore τ, introdotto da Tijs nel 1981, definito da $\tau = \alpha m + (1 - \alpha) M$, dove $m_i = c(N) - c(N \setminus \{i\}), \forall\ i \in N$ (utopia = miglior payoff per ogni singolo giocatore), $M_i = min\ \{c(S) - \sum_{j \in S \setminus \{i\}} m_j | i \in S, S \subseteq N\}, \forall\ i \in N$ (peggior payoff per ogni singolo giocatore) e α è tale che $\sum_{i \in N} \tau_i = c(N)$ che si basa su principi differenti; questo fatto rafforza reciprocamente i due concetti di soluzione.*

- *Il valore* τ *richiede che il gioco sia* quasi-bilanciato, *cioè valgano le seguenti condizioni:*
  1 - $m_i \leq M_i, \forall\ i \in N$
  2 - $\sum_{i \in N} m_i \leq c(N) \leq \sum_{i \in N} M_i$

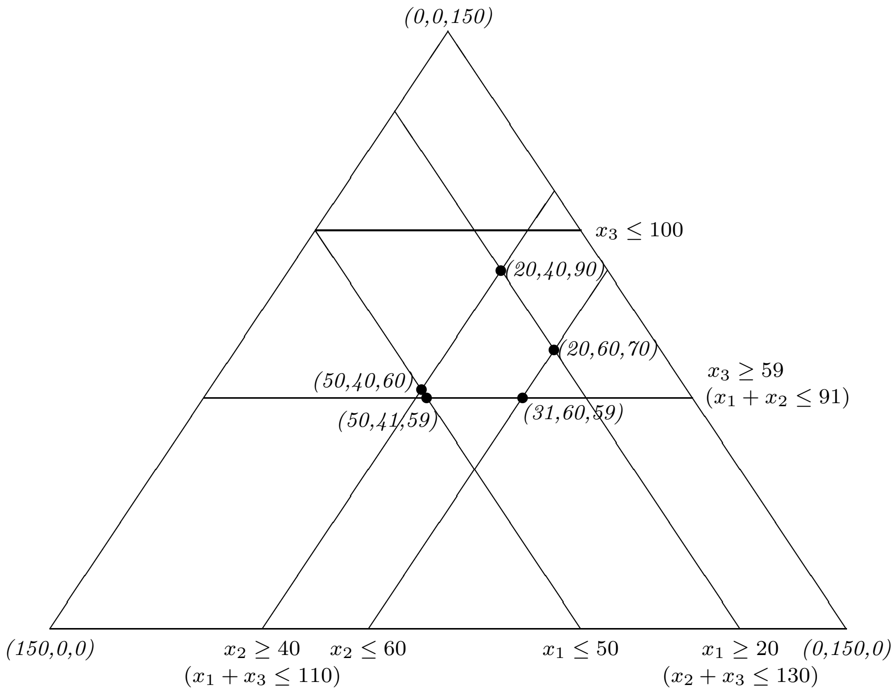
- *Per un gioco di profitti il vettore utopia è definito come* $M_i = v(N) - v(N \setminus \{i\})$ *e il peggior payoff come* $m_i = max\ \{v(S) - \sum_{j \in S \setminus \{i\}} M_j | i \in S, S \subseteq N\}, \forall\ i \in N$.

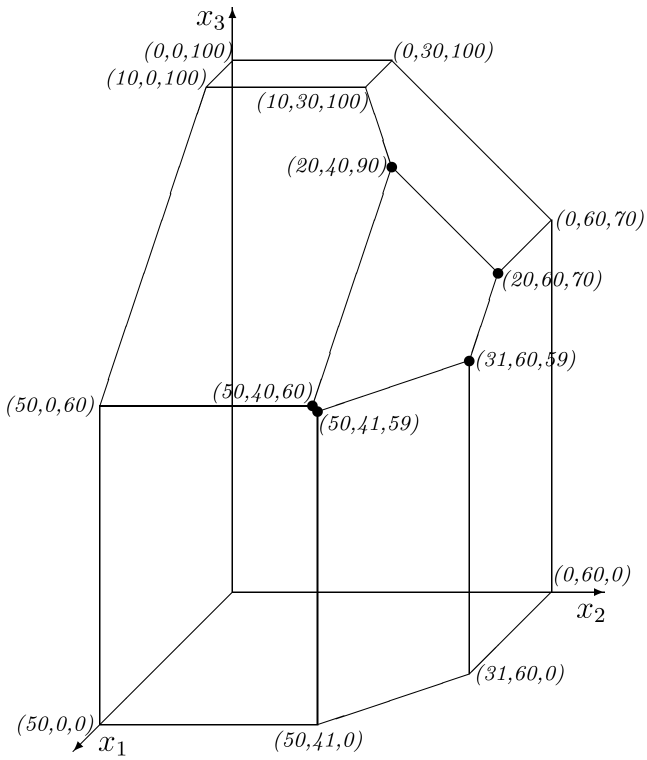
Esempio 5.1.1 (Allocazione di costi) *Sia dato il seguente gioco* $< N, c >$:

$N = \{1, 2, 3\}$

$c(1) = 50; c(2) = 60; c(3) = 100; c(12) = 91; c(13) = 110; c(23) = 130; c(N) = 150$

di cui le figure seguenti sono una rappresentazione bidimensionale e tridimensionale:





Applicando le definizioni precedenti si ha:

Costi separabili

$$m_1 = c(N) - c(N \setminus \{1\}) = 150 - 130 = 20$$
$$m_2 = c(N) - c(N \setminus \{2\}) = 150 - 110 = 40$$
$$m_3 = c(N) - c(N \setminus \{3\}) = 150 - 91 = 59$$

Costo non separabile

$$g(N) = c(N) - \sum_{i \in N} m_i = 150 - (20 + 40 + 59) = 31$$

Risparmi

$$r_1 = c(1) - m_1 = 50 - 20 = 30$$
$$r_2 = c(2) - m_2 = 60 - 40 = 20$$
$$r_3 = c(3) - m_3 = 100 - 59 = 41$$

Costi non separabili delle coalizioni

$$g(1) = c(1) - m_1 = 50 - 20 = 30$$
$$g(2) = c(2) - m_2 = 60 - 40 = 20$$
$$g(3) = c(3) - m_3 = 100 - 59 = 41$$
$$g(12) = c(12) - (m_1 + m_2) = 91 - (20 + 40) = 31$$
$$g(13) = c(13) - (m_1 + m_3) = 110 - (20 + 59) = 31$$
$$g(23) = c(23) - (m_2 + m_3) = 130 - (40 + 59) = 31$$

Minimi costi non separabili

$$g_1 = min\{g(1), g(12), g(13), g(N)\} = min\{30, 31, 31, 31\} = 30$$
$$g_2 = min\{g(2), g(12), g(23), g(N)\} = min\{20, 31, 31, 31\} = 20$$
$$g_3 = min\{g(3), g(13), g(23), g(N)\} = min\{40, 31, 31, 31\} = 31$$

I differenti criteri forniscono:

ECA

$$\begin{array}{l} ECA_1 = m_1 + \frac{1}{n}g(N) = 20 + \frac{1}{3}31 = 30.333 \\ ECA_2 = m_2 + \frac{1}{n}g(N) = 40 + \frac{1}{3}31 = 50.333 \\ ECA_3 = m_3 + \frac{1}{n}g(N) = 59 + \frac{1}{3}31 = 69.333 \end{array}$$

ACA

$$\begin{array}{l} ACA_1 = m_1 + \frac{r_1}{r_1+r_2+r_3}g(N) = 20 + \frac{30}{91}31 = 30.220 \\ ACA_2 = m_2 + \frac{r_2}{r_1+r_2+r_3}g(N) = 40 + \frac{20}{91}31 = 46.813 \\ ACA_3 = m_3 + \frac{r_3}{r_1+r_2+r_3}g(N) = 59 + \frac{41}{91}31 = 72.967 \end{array}$$

CGA

$$\begin{array}{l} CGA_1 = m_1 + \frac{g_1}{g_1+g_2+g_3}g(N) = 20 + \frac{30}{81}31 = 31.481 \\ CGA_2 = m_2 + \frac{g_2}{g_1+g_2+g_3}g(N) = 40 + \frac{20}{81}31 = 47.654 \\ CGA_3 = m_3 + \frac{g_3}{g_1+g_2+g_3}g(N) = 59 + \frac{31}{81}31 = 70.864 \end{array}$$

Per completezza si possono calcolare il valore di Shapley e il nucleolo.

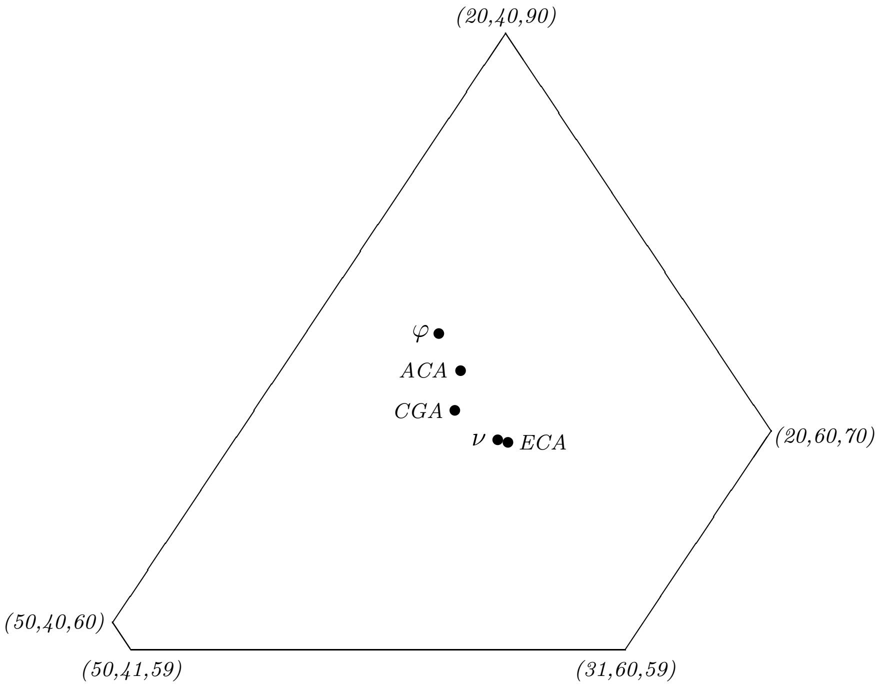
Valore Shapley

Permutazioni	*Contributi marginali*		
1 2 3	*50*	*41*	*59*
1 3 2	*50*	*40*	*60*
2 1 3	*31*	*60*	*59*
2 3 1	*20*	*60*	*70*
3 1 2	*10*	*40*	*100*
3 2 1	*20*	*30*	*100*
Valore di Shapley	*30.167*	*45.167*	*74.667*

Per avere un immediato confronto dei risultati dell'esempio si può fare riferimento alla tabella seguente:

	Allocazioni		
Criterio	x_1	x_2	x_3
ECA	*30.333*	*50.333*	*69.333*
ACA	*30.220*	*46.813*	*72.967*
CGA	*31.481*	*47.654*	*70.864*
Valore di Shapley	*30.167*	*45.167*	*74.667*
Nucleolo (ν)	*30.500*	*50.000*	*69.500*

Le allocazioni proposte appartengono tutte al nucleo e sono riportate nella figura seguente:


(20,40,90)
φ
ACA
CGA
ν
ECA
(20,60,70)
(50,40,60)
(50,41,59)
(31,60,59)

◊

Indice