1 Duopolio

1.1 Introduzione

Su un mercato economico le imprese possono assumere vari ruoli

monopolio: un'impresa è in grado di governare completamente il mercato, stabilendo autonomamente quantità da produrre e prezzo di vendita

oligopolio: poche imprese governano il mercato, ma devono ciascuna tenere conto delle altre e della richiesta del mercato stesso

concorrenza: nessuna impresa è in grado di attuare una propria politica, ma subisce le regole del mercato

Il caso dell'oligopolio è certamente quello più interessante dal punto di vista delle *interazioni strategiche* tra le imprese operanti; tra le varie situazioni la più semplice è il *duopolio*, in cui sul mercato operano solo due imprese

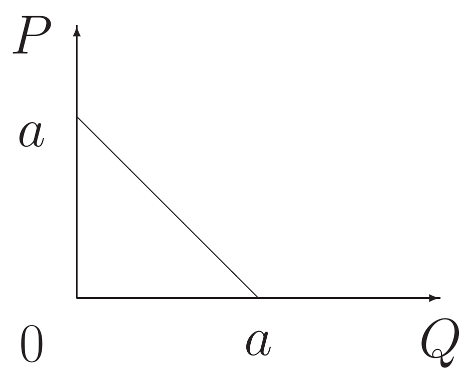
Per rendere la situazione più semplice dal punto di vista computazionale si suppone che le due imprese producano allo stesso costo un *unico bene identico* ed inoltre le funzioni di costo e domanda sono supposte lineari a tratti

1.2 Il modello di Cournot - 1838

Due imprese, 1 e 2, devono decidere simultaneamente la quantità di bene da produrre, q_1 e q_2 rispettivamente, mentre il prezzo è una funzione (solitamente decrescente) della quantità complessiva prodotta e immessa sul mercato
Non ci sono costi fissi e il costo per produrre un'unità di bene è una costante strettamente positiva c, identica per le due imprese

Il prezzo per unità di bene è una funzione decrescente dalla quantità di bene $Q = q_1 + q_2$ che le imprese producono; per semplicità si suppone:

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & se \quad Q \leq a \\ 0 & se \quad Q > a, \end{cases}$$



dove $a > c$ è una costante

Il profitto dell'impresa i è dato da:

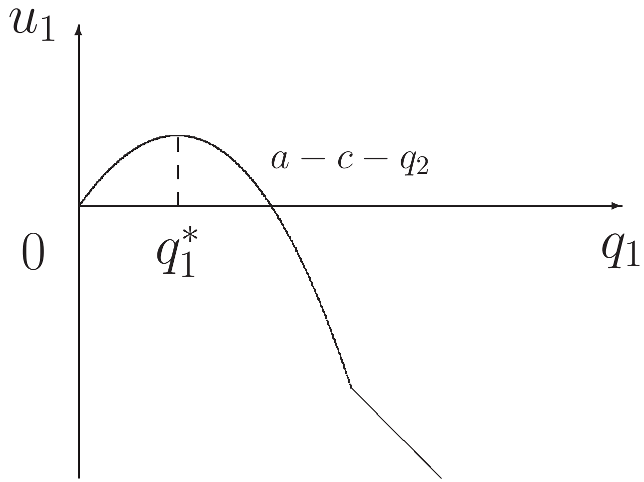
$$u_i(q_1, q_2) = P(Q)q_i - cq_i, \qquad i = 1, 2$$

Il caso $a \leq c$ è banale poichè le imprese sceglierebbero di non produrre

- Affinchè un'impresa realizzi un profitto non negativo è necessario che valga $P(Q) \geq c$, cioè $Q \leq a - c$
- Le quantità presenti in questa trattazione sono talvolta considerate solo come valore, trascurando la dimensione

Se la seconda impresa produce $q_2 \leq a - c$, la prima impresa deciderà di produrre la quantità q_1 che massimizza il suo profitto:

$$u_1(q_1, q_2) = (P(Q) - c)q_1 = \begin{cases} -q_1^2 + (a - c - q_2)q_1 & \text{se } q_1 \leq a - q_2 \\ -cq_1 & \text{se } q_1 > a - q_2. \end{cases}$$



La quantità ottimale per l'impresa 1 è $q_1^* = \dfrac{a - c - q_2}{2}$

Per la simmetria del problema la quantità ottimale per l'impresa 2 è $q_2^* = \dfrac{a - c - q_1}{2}$

Le quantità q_1^* e q_2^* possono essere determinate simultaneamente:

$$\begin{cases} q_1^* = \dfrac{a - c - q_2^*}{2} \\ q_2^* = \dfrac{a - c - q_1^*}{2} \end{cases}$$

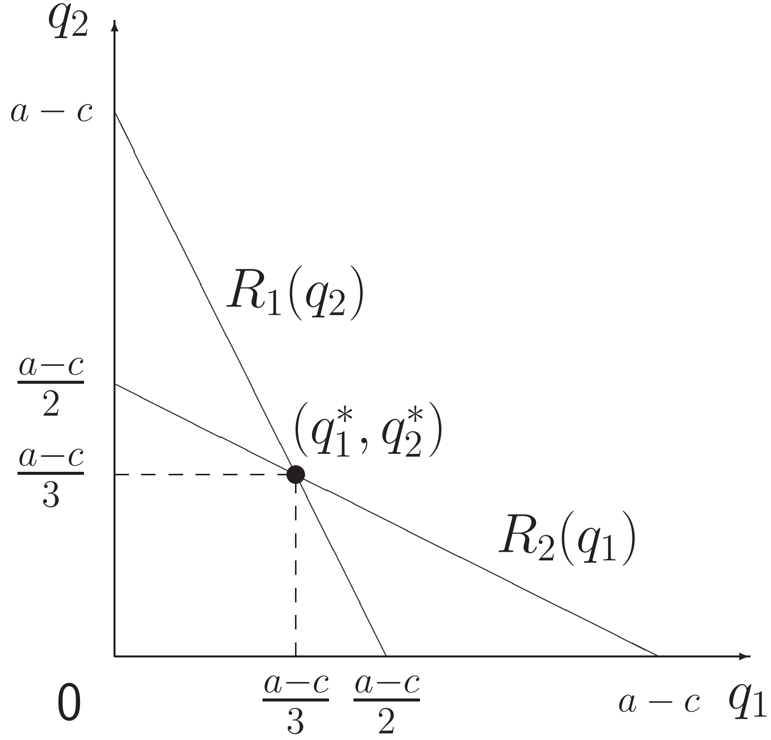
$$q_1^* = q_2^* = \frac{(a - c)}{3}$$

$$P^* = \frac{(a + 2c)}{3}$$

$$u_1(q_1^*, q_2^*) = u_2(q_1^*, q_2^*) = \frac{(a - c)^2}{9}$$

Il modello di Cournot può essere interpretato come un gioco in cui i giocatori sono le due imprese, le strategie sono le quantità che ciascuna impresa può produrre e le funzioni di utilità delle imprese coincidono con le funzioni di profitto

In questa situazione q_1^* e q_2^* sono la *miglior risposta di un'impresa alla strategia dell'altra*, cioè costituiscono un equilibrio di Nash detto *equilibrio di Cournot*



1.3 Soluzione dinamica (Best-reply)

I valori di q_1^* e q_2^* non richiedono un accordo tra le due imprese

Siano q_1^0 e q_2^0 le quantità arbitrarie prodotte al tempo t_0
Al tempo t_1 ciascuna impresa sceglie la miglior risposta alla scelta precedente dell'impresa concorrente, cioè $q_1^1 = \dfrac{a-c-q_2^0}{2}$ e $q_2^1 = \dfrac{a-c-q_1^0}{2}$
In generale al tempo t_n si ha $q_1^n = \dfrac{a-c-q_2^{n-1}}{2}$ e $q_2^n = \dfrac{a-c-q_1^{n-1}}{2}$
Inoltre

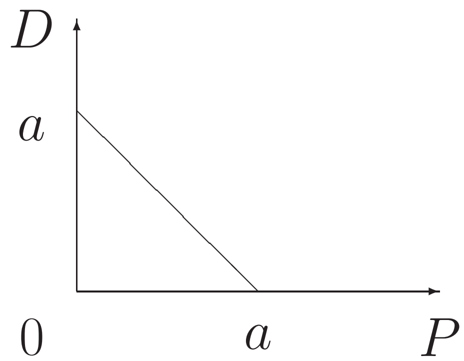
$$\lim_{n\to+\infty} q_1^n = \lim_{n\to+\infty} q_2^n = \frac{(a-c)}{3}$$

1.4 Il modello di Bertrand - 1883

Le due imprese decidono, indipendentemente e simultaneamente, i prezzi del loro prodotto, mentre la quantità di bene prodotta è tale da soddisfare la domanda che dipende dal prezzo fissato
Come nel modello di Cournot, non esistono costi fissi di produzione e il costo di produzione unitario, uguale per le due imprese, è c

I prodotti delle due imprese sono indistinguibili e il consumatore sceglie solo in base al prezzo
Detti p_1 e p_2 i prezzi scelti e $P = \min\{p_1, p_2\}$, la domanda, in funzione del prezzo è data da

$$D(P) = \begin{cases} a - P & \text{se } 0 \leq P \leq a \\ 0 & \text{se } P > a \end{cases}$$



dove $a > c$ è il prezzo massimo che i consumatori sono disposti a pagare

Se le due imprese scelgono lo stesso prezzo, si dividono il mercato a metà
Altrimenti l'impresa che fissa il prezzo più alto non ha richiesta e quindi non produce e l'altra soddisfa tutta la richiesta del mercato

Le funzioni di utilità per le due imprese sono:

$$u_1(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_1 - c)(a - p_1)_+ & \text{se } p_1 < p_2 \\ \dfrac{(p_1 - c)(a - p_1)_+}{2} & \text{se } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{se } p_1 > p_2 \end{cases}$$

$$u_2(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_2 - c)(a - p_2)_+ & \text{se } p_2 < p_1 \\ \dfrac{(p_2 - c)(a - p_2)_+}{2} & \text{se } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{se } p_2 > p_1 \end{cases}$$

Questa situazione può essere vista come *pura concorrenza*, quindi l'unico prezzo che garantisce il massimo guadagno è $p_1 = p_2 = c$:

- se $p_i < c, i = 1, 2$ l'impresa i produce in perdita
- se $p_i > c, i = 1, 2$, l'altra può conquistare tutto il mercato fissando un prezzo inferiore

- Si potrebbe pensare che il risultato del modello sia assurdo in quanto se $p_1 = p_2 = c$ entrambe le imprese non realizzano alcun profitto. Nella realtà la pura concorrenza non si verifica mai e in ogni caso il valore di c non è il mero costo di produzione, ma tiene conto di tutti i costi connessi, compresa la distribuzione e un guadagno minimo che giustifichi l'esistenza dell'impresa

Anche il modello di Bertrand può essere interpretato come un gioco in cui i giocatori sono le due imprese, le strategie sono i prezzi possibili e le funzioni di utilità sono date dalle funzioni di profitto

E' facile verificare che i prezzi $p_1 = p_2 = c$ costituiscono l'unico equilibrio di Nash detto *equilibrio di Bertrand*

(c, c) è equilibrio di Nash

Se un'impresa fissa il prezzo c, l'altra impresa non ha risposte migliori di c, in quanto se sceglie un prezzo inferiore ottiene un payoff negativo, mentre se ne fissa uno maggiore, ottiene comunque un'utilità nulla

(c, c) è l'unico equilibrio di Nash

Nessun altro punto $(\bar{p}_1, \bar{p}_2) \neq (c, c)$ è di equilibrio, infatti:

- se il minore dei due prezzi è strettamente minore di c, l'impresa che lo ha fissato ottiene un'utilità negativa, e può incrementarla fissando il prezzo c
- se il minore dei due prezzi è maggiore o uguale di c e i prezzi sono diversi, l'impresa che lo ha fissato può incrementare la sua utilità fissando un prezzo leggermente più alto
- se i prezzi sono uguali e strettamente maggiori di c, ciascuna impresa può aumentare la sua utilità riducendo leggermente il prezzo

Questo risultato è noto come *paradosso di Bertrand*

1.5 Il modello di Stackelberg - 1934

Ciascuna impresa deve decidere la quantità da produrre, ma le due imprese agiscono in tempi differenti
L'impresa 1 è dominante (*leader*) e muove per prima
L'impresa 2 è subordinata (*follower*) e muove per seconda

L'impresa leader fissa la sua quantità ottimale q_1^* e l'impresa follower decide la sua quantità ottimale q_2^* sulla base della scelta dell'impresa 1
La quantità $Q = q_1^* + q_2^*$ determina il prezzo

- L'impresa 1, sa di essere dominante e sa anche che l'impresa 2 fisserà la sua produzione q_2^* conoscendo la scelta q_1^*, quindi nel decidere il valore di q_1^* l'impresa leader terrà conto della succesiva scelta dell'impresa follower.

Per semplicità e per poter fare un confronto, la funzione di prezzo sia:

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & se \;\; Q \leq a \\ 0 & se \;\; Q > a, \end{cases}$$

e il profitto dell'impresa i sia:

$$u_i(q_1, q_2) = P(Q)q_i - cq_i, \qquad i = 1, 2$$

Se l'impresa 1 produce la quantità q_1 la produzione ottimale per l'impresa 2 è:

$$q_2^* = \frac{a - c - q_1}{2}$$

e quindi l'impresa 1 produrrà la quantità:

$$\begin{aligned} q_1^* &= argmax\ u_1(q_1, q_2^*) = argmax\ \left\{ q_1 \left(a - q_1 - \frac{a - c - q_1}{2} \right) - cq_1 \right\} \\ &= argmax\ \left\{ -\frac{1}{2} q_1^2 + \frac{a-c}{2} q_1 \right\} = \frac{a-c}{2} \end{aligned}$$

da cui si ricava:

$$q_2^* = \frac{a-c}{4}$$

$P^* = \dfrac{a + 3c}{4}$

$u_1(q_1^*, q_2^*) = \dfrac{(a-c)^2}{8}$; $u_2(q_1^*, q_2^*) = \dfrac{(a-c)^2}{16}$

Anche il modello di Stackelberg può essere interpretato come un gioco in cui i giocatori, le strategie e le funzioni di utilità sono sono le stesse del modello di Cournot
La variante è che il gioco è a informazione perfetta, per cui l'esito si può ricavare con l'induzione a ritroso

Anche in questo caso, la soluzione ottenuta costituisce un equilibrio di Nash detto *equilibrio di Stackelberg*

1.6 Confronto tra i modelli

Per completezza si consideri il caso di monopolio
Utilizzando le stesse funzioni di prezzo e di profitto si ha:

$$Q^* = argmax\ u(Q) = argmax\ \{(a-Q)Q - cQ\} = \frac{a-c}{2}$$

$$P^* = \frac{a+c}{2}$$

$$U(Q^*) = \frac{(a-c)^2}{4}$$

Si può ipotizzare che le due imprese si accordino tra di loro, gestendo la produzione, i prezzi e il mercato come se fossero in regime di monopolio, ad esempio dividendo equamente la produzione e conseguentemente i profitti, in un *monopolio alla Cournot*

$$P^* = \frac{a+c}{2}$$

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a-c}{4}$$

$$u_1(q_1^*, q_2^*) = u_2(q_1^*, q_2^*) = \frac{(a-c)^2}{8}$$

	duopolio di Cournot (i)	monopolio alla Cournot (ii)	duopolio di Stackelberg (iii)	duopolio di Bertrand (iv)
produzione	$\frac{a-c}{3}$ $\frac{a-c}{3}$	$\frac{a-c}{4}$ $\frac{a-c}{4}$	$\frac{a-c}{2}$ $\frac{a-c}{4}$	$\frac{a-c}{2}$ $\frac{a-c}{2}$
profitto	$\frac{(a-c)^2}{9}$ $\frac{(a-c)^2}{9}$	$\frac{(a-c)^2}{8}$ $\frac{(a-c)^2}{8}$	$\frac{(a-c)^2}{8}$ $\frac{(a-c)^2}{16}$	0 0
prezzo	$\frac{a+2c}{3}$	$\frac{a+c}{2}$	$\frac{a+3c}{4}$	c

La produzione complessiva ha il seguente ordine decrescente:

$$iv - iii - i - ii$$

Il profitto complessivo ha il seguente ordine decrescente:

$$ii - i - iii - iv$$

Il prezzo ha il seguente ordine decrescente (ricordando che $a > c$):

$$ii - i - iii - iv$$

- la situazione *socialmente* migliore è il duopolio di Bertrand, o in generale la libera concorrenza (massima disponibilità del bene al prezzo minimo)
  la situazione *socialmente* peggiore è il monopolio alla Cournot, o in generale il monopolio, (minima disponibilità del bene al prezzo massimo)
  il duopolio di Stackelberg è *socialmente* preferibile al duopolio di Cournot in quanto la disponibilità del bene è maggiore e il prezzo è minore

- dal punto di vista delle imprese il monopolio alla Cournot garantisce ad entrambe il profitto massimo e quindi si può dedurre che la soluzione di Cournot è inefficiente, ma non risulta stabile
  Infatti se un'impresa viola l'accordo e aumenta la sua produzione può incrementare il suo profitto, nonostante il prezzo si riduca
  Se l'impresa 1 decide di produrre $\dfrac{a-c}{4}+\varepsilon$ il prezzo scende a $\dfrac{a+c}{2}-\varepsilon$ e il suo profitto è $\dfrac{(a-c)^2}{8}+\dfrac{a-c}{4}\varepsilon-\varepsilon^2$ che risulta maggiore se $\varepsilon<\dfrac{a-c}{4}$
  Per $\varepsilon=\dfrac{a-c}{4}$ si ottiene la soluzione di Stackelberg
- dal punto di vista delle imprese il duopolio di Stackelberg è preferibile al duopolio di Cournot per l'impresa leader ma non per l'impresa follower

1.7 Il modello di Hotelling

Include anche l'aspetto spaziale

I due agenti producono un unico identico bene e devono decidere dove collocarsi per vendere il loro prodotto
A parità di prezzo i consumatori si recheranno dall'agente più vicino
Il mercato è rappresentato dal segmento $(0, 1)$ e i consumatori sono uniformemente distribuiti lungo il segmento stesso
L'esempio più classico è quello di due gelatai che devono decidere dove collocarsi lungo una spiaggia

Nella soluzione ottimale gli agenti si collocano entrambi nel punto $\frac{1}{2}$
Uno ottiene il segmento $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ e l'altro il segmento $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

Questa soluzione è stabile (*equilibrio di Hotelling*)

- Se un agente si colloca nel punto $\frac{1}{2} + 2\varepsilon$ e l'altro nel punto $\frac{1}{2}$, lui ottiene il segmento $\left(\frac{1}{2} + \varepsilon, 1\right)$ e l'altro il segmento $\left(0, \frac{1}{2} + \varepsilon\right)$
- Se un agente si colloca nel punto $\frac{1}{2} - 2\varepsilon$, lui ottiene il segmento $\left(0, \frac{1}{2} - \varepsilon\right)$ e l'altro il segmento $\left(\frac{1}{2} - \varepsilon, 1\right)$.

- Questa soluzione è socialmente inefficiente in quanto per i consumatori l'agente più vicino è ad una distanza media di $\frac{1}{4}$
  La soluzione efficiente è che un agente si collochi nel punto $\frac{1}{4}$ e l'altro nel punto $\frac{3}{4}$, poichè in questo caso l'agente più vicino è ad una distanza media di $\frac{1}{8}$
  Anche in questo caso un agente ottiene il segmento $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ e l'altro il segmento $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, ma questa soluzione non è stabile.

- Questo modello permette di rappresentare il comportamento dei candidati nei sistemi elettorali bipolari, ad esempio l'elezione del presidente degli Stati Uniti
  Il segmento rappresenta le posizioni degli elettori sull'asse *Democratici-Repubblicani* e i due agenti sono i candidati che cercano di collocarsi al centro (*"rush for the middle"*), tenendo conto che la distribuzione degli elettori non è uniforme

3.6 Forma caratteristica

Può essere usata solo per i giochi cooperativi

Definizione 3.2

- *Detto N l'insieme dei giocatori, ogni sottoinsieme S di N è detto coalizione. Se $S = N$ si ha la grande coalizione*
- *Si dice funzione caratteristica di un gioco ad n giocatori una funzione indicata con v (se il gioco è senza pagamenti laterali si usa V ed è più complessa) per cui si ha:*

$$v : \wp(N) \rightarrow \mathbb{R} \text{ con } v(\emptyset) = 0$$

- *Se per ogni coppia di coalizioni disgiunte S e T si ha $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$ la funzione v è detta additiva; se si ha $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ la funzione v è detta superadditiva; se si ha $v(S \cup T) \leq v(s) + v(T)$ la funzione v è detta subadditiva*
- v assegna ad S la massima vincita possibile indipendentemente dal comportamento degli altri giocatori
- La funzione caratteristica e il gioco possono essere identificati

Un gioco descritto tramite la funzione caratteristica è detto in *forma caratteristica* o *coalizionale*
Se la funzione caratteristica è additiva o superadditiva o subadditiva anche il gioco è detto *additivo* o *superadditivo* o *subadditivo*
Se per ogni coalizione S si ha $v(S) + v(N \setminus S) = v(N)$ il gioco è detto *a somma costante*

Esempio 3.5 (Maggioranza semplice)
Tre giocatori vogliono conseguire un risultato; se almeno due di essi si uniscono raggiungono il loro obiettivo. Questa situazione può essere rappresentata dal seguente gioco:

$N = \{1, 2, 3\}$
$v(\emptyset) = v(1) = v(2) = v(3) = 0; v(1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = v(1, 2, 3) = 1$ $\diamondsuit$

La descrizione del gioco è molto "povera", in quanto non permette di definire la vincita di ogni singolo giocatore della coalizione, ma solo la vincita complessiva

2 Giochi cooperativi

2.1 Introduzione

I giocatori possono associarsi per migliorare il proprio risultato
Per realizzare la cooperazione:

- deve essere possibile stipulare accordi (ad esempio non devono esserci regole antitrust o difficoltà di comunicazione)
- deve esserci la possibilità di far rispettare tali accordi, nel senso che deve esistere una autorità sufficientemente forte e accettata da tutti i componenti

Si distinguono due sottoclassi:

- Giochi cooperativi senza pagamenti laterali (NTU-Games)
  i giocatori ricevono un payoff assegnato
- Giochi cooperativi a pagamenti laterali (TU-Games)
  i giocatori di una coalizione possono ripartirsi in qualsiasi modo la vincita

I secondi costituiscono un caso particolare dei primi

In particolare per avere un gioco TU devono essere soddisfatte tre ipotesi:

- deve essere possibile trasferire l'utilità (da un punto di vista normativo)
- deve esistere un mezzo comune di scambio, ad esempio il denaro, con cui trasferire l'utilità (da un punto di vista materiale)
- le funzioni di utilità dei giocatori devono essere equivalenti

Esempio 2.1 (Coalizione semplice) *Sono dati tre giocatori I, II, III; se due di loro si accordano, formando una coalizione, il terzo giocatore da ad ognuno di essi una moneta, altrimenti nessuno riceve nulla. I payoff sono:*

$(1, 1, -2)$	*se I e II si coalizzano*
$(1, -2, 1)$	*se I e III si coalizzano*
$(-2, 1, 1)$	*se II e III si coalizzano*
$(0, 0, 0)$	*altrimenti*

Se i payoff relativi alla coalizione (II, III) fossero $(-2.0, 1.1, 0.9)$ *la posizione del giocatore II non si rafforza in quanto il giocatore III ha più interesse a coalizzarsi con I che con II; questa situazione non sussiste nel caso in cui sia possibile per II "trasferire" parte della propria vincita al giocatore III, ritornando alla situazione precedente* $\diamondsuit$

2.1.1 Funzione caratteristica per un gioco TU

Può essere costruita a partire dal gioco a due persone tra S ed $N \setminus S$:

$$v'(S) = \max_{\sigma_S \in \Sigma_S} \quad \min_{\sigma_{N\setminus S} \in \Sigma_{N\setminus S}} \left\{ \sum_{i \in S} u_i(\sigma_S, \sigma_{N\setminus S}) \right\} \quad \text{(von Neumann-Morgenstern)}$$

$$v''(S) = \min_{\sigma_{N\setminus S} \in \Sigma_{N\setminus S}} \quad \max_{\sigma_S \in \Sigma_S} \left\{ \sum_{i \in S} u_i(\sigma_S, \sigma_{N\setminus S}) \right\}$$

I due risultati possono non coincidere ($v'' \geq v'$)

Il problema è assegnare correttamente il valore di $v(S)$

Esempio 2.2 (Costruzione della funzione caratteristica - I) *Si consideri il seguente gioco a tre giocatori:*

3 = S		
1 / 2	L	R
T	$1, 0, 4$	$1, 0, -2$
B	$1, 2, -3$	$0, -1, -5$

3 = C		
1 / 2	L	R
T	$1, -3, -3$	$2, 0, -4$
B	$0, 1, 4$	$0, -1, -2$

3 = D		
1 / 2	L	R
T	$1, 4, 3$	$2, -3, 4$
B	$2, 2, 3$	$0, 1, 5$

Volendo determinare il valore di v si può costruire il gioco tra $S = \{1, 2\}$ e $N \setminus S = \{3\}$:

S / $N \setminus S$	N_1	N_2	N_3
S_1	$1, 4$	$-2, -3$	$5, 3$
S_2	$1, -2$	$2, -4$	$-1, 4$
S_3	$3, -3$	$1, 4$	$4, 3$
S_4	$-1, -5$	$-1, -2$	$1, 5$

dove $S_1 = (T, L)$, $S_2 = (T, R)$, $S_3 = (B, L)$, $S_4 = (B, R)$ *e* $N_1 = S$, $N_2 = C$, $N_3 = D$

$$v'(S) = \max_{\sigma_S \in \Sigma_S} \min_{\sigma_{N\setminus S} \in \Sigma_{N\setminus S}} \left\{\widehat{u}_i(\sigma_S, \sigma_{N\setminus S})\right\} = \max\{-2, -1, 1, -1\} = 1$$

$$v''(S) = \min_{\sigma_{N\setminus S} \in \Sigma_{N\setminus S}} \max_{\sigma_S \in \Sigma_S} \left\{\widehat{u}_i(\sigma_S, \sigma_{N\setminus S})\right\} = \min\{3, 2, 5\} = 2$$

$v'(S)$ *corrisponde alla strategia* S_3 *ed in effetti la coalizione* S *giocando* $S_3 = (B, L)$ *può garantirsi un payoff non inferiore a 1, mentre il valore* $v''(S)$ *corrisponde alla strategia* S_2*, ma la coalizione* S *giocando* $S_2 = (T, R)$ *non può garantirsi un payoff non inferiore a 2, anzi probabilmente il suo payoff risulterà inferiore*
Entrambe le interpretazioni difettano di realismo poichè lo scopo della coalizione $N \setminus S$ *è quello di massimizzare il proprio payoff e non di minimizzare il payoff di* S
La validità delle formule precedenti è limitata dal fatto di non considerare le utilità di $N \setminus S$*: in questo caso è facile osservare che* $N \setminus S$ *considera "rischiose" le strategie* N_1 *ed* N_2*, in corrispondenza delle quali si hanno i valori* $v'(S)$ *e* $v''(S)$ $\diamondsuit$

Le funzioni di utilità sono solo rappresentazioni delle preferenze dei giocatori, pertanto la scelta delle strategie dei giocatori di S dovrebbe avvenire non sulle funzioni di utilità, ma sulle preferenze

Triplicando le utilità del giocatore 1 si ottiene:

S / $N \setminus S$	N_1	N_2	N_3
S_1	$3, 4$	$0, -3$	$7, 3$
S_2	$3, -2$	$6, -4$	$3, 4$
S_3	$5, -3$	$1, 4$	$8, 3$
S_4	$-1, -5$	$-1, -2$	$1, 5$

e quindi:

$$v'(S) = max\{0, 3, 1, -1\} = 3$$
$$v''(S) = min\{5, 6, 8\} = 5$$

I valori risultano differenti, ma soprattutto si ottengono in corrispondenza di differenti strategie per la coalizione S, in particolare $v'(S)$ si ottiene per S_2 e $v''(S)$ per S_3

Alle funzioni di utilità è stato dato un significato quantitativo che non necessariamente hanno

Le funzioni di utilità non sono necessariamente additive, quindi non si può definire l'utilità della coalizione come la somma delle utilità

La funzione caratteristica assegna ad ogni coalizione l'utilità che i giocatori possono ottenere "indipendentemente" dagli altri, non "qualunque sia la strategia" degli altri giocatori oppure "escludendo" gli altri giocatori
Si può utilizzare il significato di "senza la collaborazione" degli altri giocatori

Esempio 2.3 (Costruzione della funzione caratteristica - II) *Due fratelli, I e II, devono dividersi un'eredità (oggetti A, B, C, D) con le valutazioni:*

	A	B	C	D
I	12	10	9	6
II	2	3	1	5

L'esecutore testamentario in mancanza di un accordo assegnerà 2 oggetti a ciascuno, a sua discrezione
Nel peggiore dei casi I ottiene C e D e II ottiene A e C
Porre $v(\{I\}) = 15$ *(oggetti C e D) implica che II voglia tenersi gli oggetti A e B (improbabile perchè lascerebbe l'oggetto D)*
Analogamente $v(\{I\}) = 22$ *(oggetti A e B) implica che II accetti di prendere l'oggetto C che per lui ha valore minimo*
I è in grado di garantirsi $v(\{I\}) = 21$ *(oggetti A e C) (gli oggetti B e D hanno maggior valore per II)*
Analogamente II può ottenere "senza la collaborazione" di I $v(\{II\}) = 6$ *(oggetti C e D, lasciando a I gli oggetti A e B di maggior valore)*
$v(\{I, II\}) = 37$ *(tutti gli oggetti a I e ripartizione del valore tra i due giocatori)* $\diamondsuit$

- Se il gioco fosse stato ad utilità non trasferibile la funzione caratteristica avrebbe assegnato alla grande coalizione tutte le coppie di valori che i due giocatori possono ottenere, ad esempio $(12, 9)$ corrispondente a dare l'oggetto A al giocatore I e gli altri tre oggetti al giocatore II, oppure $(18, 4)$ corrispondente a dare al giocatore I gli oggetti A e D e al giocatore II gli oggetti B e C, oppure $(0, 11)$ corrispondente a dare i quattro oggetti al giocatore II e così via

Sono state proposte altre definizioni per $v(S)$, ad esempio il valore ottenuto in corrispondenza delle strategie che massimizzano la differenza tra il payoff di S e di $N \setminus S$, ma nessuna supera le questioni poste, a meno di oppurtune ipotesi sulle funzioni di utilità, ad esempio supporre che siano additive e uguali per tutti i giocatori

2.2 Giochi cooperativi a pagamenti laterali

In questi giochi introdotti da Von Neumann e Morgenstern (1944) i giocatori possono stipulare accordi vincolanti e possono ripartirsi la vincita con un accordo al di fuori delle regole del gioco, la cui validità può estendersi anche oltre la fine del gioco

Come trasferire la vincita se i giocatori hanno differenti funzioni di utilità?

Definizione 2.1 *Un gioco TU è una coppia* $G = (N, v)$ *dove* N *è l'insieme dei giocatori e* v *è la funzione caratteristica, con* $v(\emptyset) = 0$

Se $v(S) \leq 0$ si ha un *gioco di costi* o cost game (N, c) in cui si pone $c = -v$

Esempio 2.4 (Gioco dei guanti) *Due insiemi di giocatori, L ed R, possiedono dei guanti; i giocatori di L possiedono solo guanti sinistri mentre i giocatori di R possiedono solo guanti destri. Il valore di una coalizione è dato dal numero di paia di guanti che riescono a formare. In generale ogni giocatore possiede un solo guanto. Se i giocatori di L sono 1 e 2 e i giocatori di R sono 3 e 4 si ha:*

$$\begin{array}{ll}
N = \{1,2,3,4\} & \\
v(i) = 0 & \forall\ i \in N \\
v(12) = v(34) = 0 & \\
v(S) = 1 & se\ |S| = 2\ e\ S \neq \{12\}, S \neq \{34\}\ oppure\ se\ |S| = 3 \\
v(N) = 2 &
\end{array}$$

$\diamondsuit$

Definizione 2.2 *Un gioco* $G = (N, v)$ *si dice monotono se* $v(S) \leq v(T), \ \forall \ S \subseteq T$

Definizione 2.3 *Un gioco* $G = (N, v)$ *si dice convesso se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:*

- $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T), \ \forall \ S, T \subseteq N$
- $v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T), \ \forall \ S \subset T \subseteq N \setminus \{i\}$

Definizione 2.4 *Un gioco* $G = (N, v)$ *si dice semplice 0-1 o semplice se le coalizioni possono assumere solo i valori 0 e 1*
Se una coalizione ha valore 1 è detta vincente, se ha valore 0 è detta perdente Solitamente la grande coalizione è vincente

Definizione 2.5 *Un gioco* $G = (N, v)$ *si dice coesivo se per ogni partizione di* N $\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ *si ha:*

$$\sum_{i=1,\ldots,k} v(S_i) \leq v(N)$$

- Nella definizione di monotonia non si tiene conto della cardinalità delle coalizioni
- L'equivalenza delle definizioni di convessità è oggetto di un teorema.
- I giochi semplici trovano applicazione nelle situazioni in cui una coalizione è caratterizzata dal riuscire a conseguire o meno un determinato risultato, come nei giochi di maggioranza, utilizzati in politica
- La coesività è più debole della superadditività ed esprime la "convenienza" dei giocatori a formare la grande coalizione, piuttosto che riunirsi in sottocoalizioni. L'importanza deriva dal fatto che in generale i concetti di soluzione più comuni costituiscono una ripartizione del valore della grande coalizione

Le soluzioni di un gioco TU possono essere raggruppate in due famiglie:

- *soluzioni insiemistiche* che individuano un insieme di vettori payoff che ripartiscono il valore del gioco tra tutti i giocatori
- *soluzioni puntuali* che individuano una sola ripartizione e che costituiscono l'attuale tendenza in quanto più simili all'idea classica di soluzione di un problema

3 Soluzioni insiemistiche di un gioco TU

3.1 Imputazioni

Per determinare le singole vincite si potrebbe risolvere un sottogioco ristretto ai giocatori di ciascuna coalizione, oppure suddividere in parti uguali la vincita, trascurando il contributo dei singoli giocatori
Altri metodi più complessi tengono conto del ruolo svolto da ciascun giocatore

Definizione 3.1 *Dato un gioco $G = (N, v)$ si dice imputazione o ripartizione del valore del gioco o soluzione del gioco un vettore $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tale che:*

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N) \qquad \textit{ipotesi di efficienza}$$

$$x_i \geq v(i); i = 1, \ldots, n \qquad \textit{ipotesi di forza dei giocatori o razionalità individuale}$$

Nel caso di un cost game la razionalità individuale richiede $x_i \leq c(i)$

L'insieme di tutte le imputazioni si indica con $E(v)$

Definizione 3.2 *Se per un gioco* $G = (N, v)$ *si ha:*

$$\sum_{i \in N} v(i) = v(N)$$

allora $E(v)$ *ha come unico elemento* $x = (v(1), v(2), \ldots, v(n))$*; in questo caso il gioco è detto inessenziale e essenziale altrimenti*

La razionalità individuale costituisce una condizione per ogni concetto di soluzione
Se il gioco è essenziale esistono più imputazioni possibili e si ripropone il problema di scegliere la "soluzione": se due imputazioni x e y sono distinte esiste almeno un giocatore k per cui $x_k > y_k$ e almeno un giocatore h per cui $x_h < y_h$

Definizione 3.3

- *Date* $x, y \in E(v)$ *e una coalizione* S *si dice che* x *domina* y *mediante* $S, x \succ_S y$*, se:*

  1. $x_i > y_i \qquad \forall i \in S$
  2. $x(S) \leq v(S)$

  dove $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$.

- *Date* $x, y \in E(v)$ *si dice che* x *domina* y, $x \succ y$*, se esiste* S *tale che* $x \succ_S y$

La dominanza non è riflessiva, nè antisimmetrica, nè transitiva

Esempio 3.1 (Non antisimmetria) *Sia dato il seguente gioco:*

$$
\begin{aligned}
&N = \{1, 2, 3, 4\} \\
&v(i) = 0 \\
&v(i, j) = v(i, j, k) = v(N) = 1 \qquad \forall i, j, k
\end{aligned}
$$

Date le seguenti imputazioni $x = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$ *e* $y = (0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *si ha:*

$$x \succ_{\{1,2\}} y \ e \ y \succ_{\{3,4\}} x$$

$\diamondsuit$

3.2 Nucleo

E' probabilmente il concetto di soluzione insiemistico più interessante per numerose classi di giochi; è stato introdotto da Gillies (1953 e 1959)

$$x(S) \geq v(S) \;\; S \subset N \qquad \text{ipotesi di razionalità della coalizione}$$

Definizione 3.4 *Si dice nucleo di un gioco, o core, l'insieme:*

$$C(v) = \{x \in E(v) | x(S) \geq v(S), \forall\, S \subset N\}$$

Nel caso di un cost game c *la razionalità della coalizione richiede* $x(S) \leq c(S), \forall\, S \subset N$

- Le imputazioni non dominate costituiscono il nucleo del gioco
- Il nucleo può essere vuoto come nel gioco di maggioranza semplice e in generale nei giochi essenziali a somma costante
- Il nucleo ha un aspetto normativo (quali soluzioni non bisogna scegliere). Se il nucleo è vuoto non si può concludere che la grande coalizione non si forma, ma solo che è instabile

Esempio 3.2 (Nucleo del gioco dei guanti) *Riferendosi all'Esempio 2.4, il nucleo è:*

$$C(v) = \{(\alpha, \alpha, 1-\alpha, 1-\alpha) s.t. 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

In generale se $L = \{1, ..., n_l\}$ *e* $R = \{1, ..., n_r\}$ *si ha:*

se $n_l = n_r$*:*

$$C(v) = \{(\alpha, ..., \alpha, 1-\alpha, ..., 1-\alpha) s.t. 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

se $n_l < n_r$*:*

$$C(v) = \{(\underbrace{1, ..., 1}_{1,...,n_l}, \underbrace{0, ..., 0}_{1,...,n_r})\}$$

se $n_l > n_r$*:*

$$C(v) = \{(\underbrace{0, ..., 0}_{1,...,n_l}, \underbrace{1, ..., 1}_{1,...,n_r})\}$$

Il nucleo evidenzia il comportamento del mercato quando uno tra due beni complementari è carente $\diamondsuit$

3.2.1 Bilanciamento

Per stabilire se un gioco ha nucleo vuoto o meno, la coesività o la superadditività non danno informazioni precise; ad esempio il gioco di maggioranza semplice ha nucleo vuoto ma è superadditivo e quindi anche coesivo
Un gioco può non essere superadditivo, ma avere nucleo non vuoto

Esempio 3.3 (Gioco non superadditivo a nucleo non vuoto) *Si consideri il gioco TU:*

$$\begin{aligned} &N = \{1, 2, 3\} \\ &v(S) = 1 \qquad se\ S \neq N \\ &v(N) = 3 \end{aligned}$$

Il gioco non è superadditivo poichè $v(1) + v(2) = 2$ *e* $v(12) = 1$ *ma ha nucleo non vuoto in quanto* $x = (1, 1, 1) \in C(v)$ $\diamondsuit$

Se un gioco non è coesivo ha nucleo vuoto, in quanto esisterebbero una allocazione x e una partizione $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ per cui:

$$x(N) = v(N) < \sum_{i=1,\dots,k} v(S_i) \leq \sum_{i=1,\dots,k} x(S_i) = x(N)$$

Le imputazioni del nucleo possono essere caratterizzate come le soluzioni del problema lineare:

$$\begin{aligned} min \;\; & z = \sum_{i \in N} x_i \\ s.t. \;\; & \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \qquad \forall S \subseteq N \end{aligned}$$

per le quali $z^* = v(N)$

Il duale del problema è:

$$\begin{aligned} max \;\; & w = \sum_{S \subseteq N} y_s v(S) \\ s.t. \;\; & \sum_{S \ni i} y_S = 1 \qquad\qquad \forall i \in N \\ & y_S \geq 0 \qquad\qquad\qquad \forall S \subseteq N \end{aligned}$$

per le quali $w^* = v(N)$

Teorema 3.1 *Un gioco v ha nucleo non vuoto se e solo se esiste una soluzione del problema primale con $z^* = v(N)$ o equivalentemente (per il primo teorema della dualità) esiste una soluzione del problema duale con $w^* = v(N)$*

L'utilità di questo teorema è molto limitata in quanto la difficoltà di verificare una delle tre condizioni è equivalente

Definizione 3.5

- *Una collezione* $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ *di sottoinsiemi di* N *è detta bilanciata se esistono* m *numeri non negativi* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *detti coefficienti di bilanciamento, tali che:*

$$\sum_{S_j \ni i} y_j = 1 \qquad \forall i \in N$$

- *Una collezione bilanciata è detta minimale se nessuna sottocollezione è bilanciata*
- *Un gioco è detto bilanciato se per ogni collezione bilanciata minimale* $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ *con coefficienti di bilanciamento* $y_1, y_2, \ldots, y_m$*, si ha:*

$$\sum_{j=1,\ldots,m} y_j v(S_j) \leq v(N)$$

Proprietà

- Ogni collezione bilanciata è unione di collezioni bilanciate minimali
- Una collezione bilanciata è minimale se e solo se i coefficienti di bilanciamento sono unici
- Le collezioni bilanciate non dipendono dalla funzione caratteristica, ma solo da N

Esempio 3.4 (Collezioni bilanciate I)

1. *Ogni partizione di N è una collezione bilanciata, con coefficienti unitari.*
2. *Sia $N = \{1, 2, 3\}$; $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ è una collezione bilanciata con coefficienti $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. In generale per ogni N la collezione di $\binom{n}{s}$ sottoinsiemi distinti di s elementi è bilanciata con coefficienti $\binom{n-1}{s-1}^{-1}$.*

$\diamondsuit$

Teorema 3.2 (Bondareva, 1963 - Shapley, 1967) *Un gioco $G = (N, v)$ ha nucleo non vuoto se e solo se è bilanciato*

<u>Dimostrazione</u>

$$C(v) \neq \emptyset \iff v(N) = min \left\{ \sum_{i=1,\dots,n} x_i |\ x(S) \geq v(S)\ \forall\ S \subseteq N \right\} \iff$$

$$\iff v(N) = max \left\{ \sum_{S \subseteq N} y_S v(S) | \sum_{S \ni i} y_S = 1\ \forall i \in N, y_S \geq 0\ \forall\ S \subseteq N \right\} \iff$$

$$\iff \sum_{S \subseteq N} y_S v(S) \leq v(N)$$

$\clubsuit$

- Il teorema di Bondareva-Shapley considera un sistema lineare generato da un sottoinsieme dei vincoli del problema duale associato al nucleo
- Per un gioco superadditivo il teorema di Bondareva-Shapley è vero per le partizioni di N, quindi è sufficiente verificarlo per le altre collezioni bilanciate minimali
- Il teorema è particolarmente utile per dimostrare che un gioco ha nucleo vuoto in quanto è sufficiente trovare una collezione bilanciata che non verifica la condizione
- Un gioco a nucleo non vuoto viene anche detto bilanciato

Esempio 3.5 (Collezioni bilanciate II)

1. *Un gioco a tre giocatori superadditivo è bilanciato se e solo se* $v(12) + v(13) + v(23) \leq 2\ v(123)$ *poichè* $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ *è l'unica collezione bilanciata minimale con coefficienti* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

2. *Sia dato il gioco:*

$$
\begin{aligned}
&N = \{1, 2, 3, 4\} \\
&v(1) = v(2) = v(3) = v(4) = v(14) = v(24) = 0; v(23) = v(34) = 2 \\
&v(12) = v(13) = v(123) = 3; v(124) = 4; v(134) = v(234) = 5; v(N) = 6
\end{aligned}
$$

   Il gioco non è bilanciato in quanto $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ *è una collezione bilanciata con coefficienti* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *per la quale si ha:*

$$\frac{1}{2}v(12) + \frac{1}{2}v(134) + \frac{1}{2}v(234) = \frac{13}{2} > 6 = v(N)$$

$\diamondsuit$

3.3 Esempi di giochi e nucleo

3.3.1 Bankruptcy game

Allocazione di una risorsa insufficiente

$$\mathcal{B} = (N, c, E) = (E; c_1, ..., c_n)$$

dove	$N = \{1, ..., n\}$	insieme dei creditori
	$c = \{c_1, ..., c_n\}$	vettore delle richieste
	E	capitale, con $E < \sum_{i \in N} c_i = C$

Ogni ripartizione ammissibile ("razionale") del capitale, $x = \{x_1, ..., x_n\}$ deve soddisfare:

$$\sum_{i \in N} x_i = E$$
$$0 \leq x_i \leq c_i, \qquad i \in N$$

Soluzioni

- $PROP$ - Le quote assegnate sono proporzionali alle richieste di ciascuno:

$$PROP_i = \frac{c_i}{C}E \qquad i \in N$$

- CEA - Le quote assegnate sono uguali per tutti, col vincolo di non superare le richieste di ciascuno:

$$CEA_i = \min(\alpha, c_i) \qquad i \in N$$

  dove α è l'unico valore reale positivo per cui $\sum_{i \in N} CEA_i = E$

- CEL - Le quote assegnate sono uguali alle richieste di ciascuno diminuite di una quantità uguale per tutti, col vincolo di non assegnare quote negative:

$$CEL_i = \max(c_i - \beta, 0) \qquad i \in N$$

  dove β è l'unico valore reale positivo per cui $\sum_{i \in N} CEL_i = E$

Esempio 3.6 (Soluzioni) *Si consideri il problema di bancarotta* $(15; 3, 6, 7, 14)$.

PROP $= (1.5, 3, 3.5, 7)$

CEA $= (3, 4, 4, 4)$

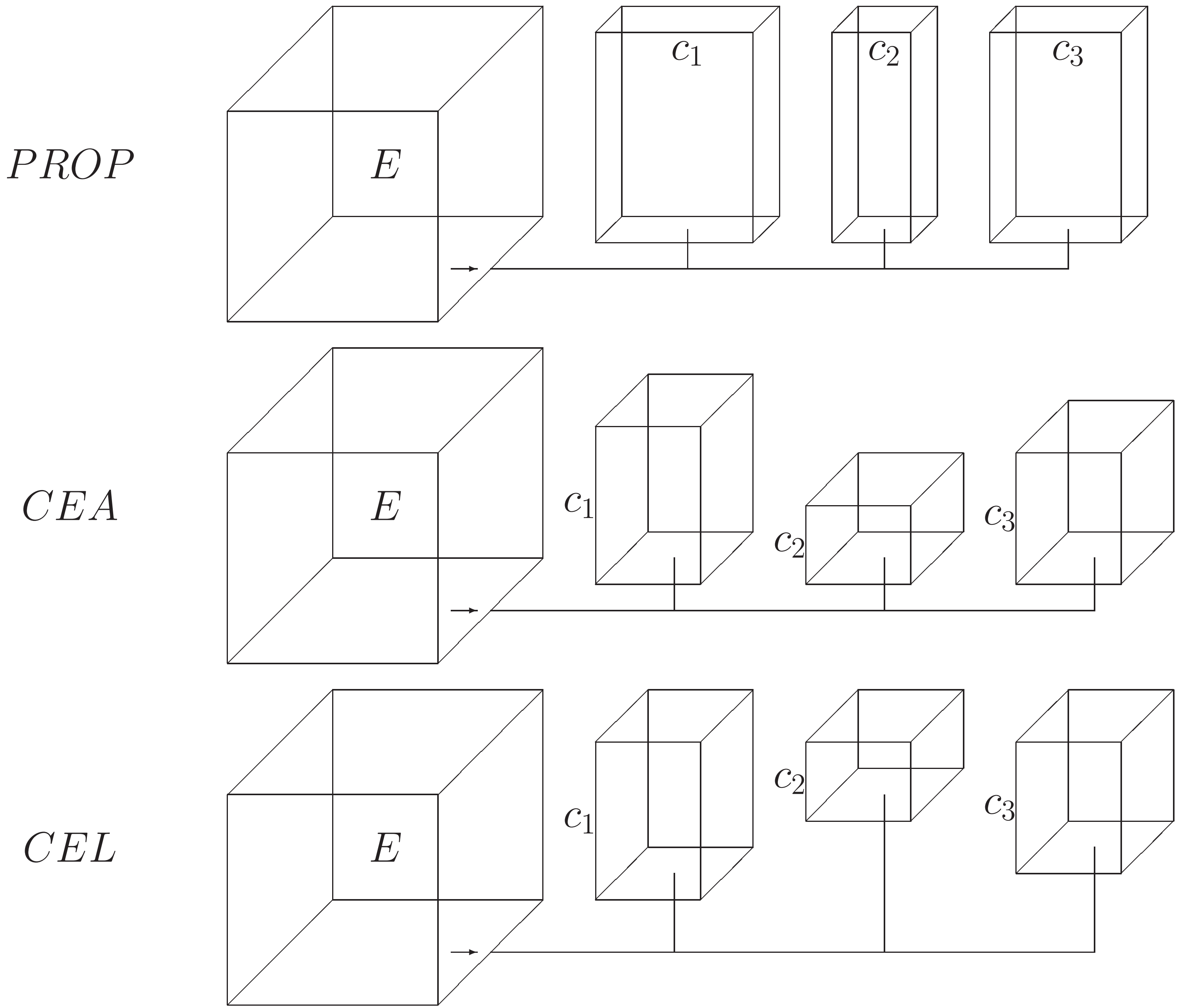
CEL $= (0, 2, 3, 10)$ $\diamondsuit$

$PROP$ è la soluzione più intuitiva

CEA è quella che più protegge i piccoli creditori

CEL è quella più favorevole ai grossi creditori

Interpretazione dei vasi comunicanti



Si possono definire due giochi TU, uno pessimistico, (N, v_P), e uno ottimistico, (N, v_O), con:

$$v_P(S) = max\left(0, E - \sum_{i \in N \setminus S} c_i\right) \qquad S \subseteq N$$

$$v_O(S) = min\left(E, \sum_{i \in S} c_i\right) \qquad S \subseteq N$$

Esempio 3.7 (Inconsistenza del gioco ottimistico) *Si consideri il problema di bancarotta* $(5; 3, 4)$. *I due giochi sono definiti rispettivamente da:*

$$v_O(1) = 3; v_O(2) = 4; v_O(12) = 5$$
$$v_P(1) = 1; v_P(2) = 2; v_P(12) = 5$$

per cui il gioco ottimistico dice che i due giocatori separatamente possono ottenere rispettivamente 3 *e* 4, *mentre il capitale è solo* 5 $\diamondsuit$

Il nucleo del gioco pessimistico coincide con l'insieme delle soluzioni ammissibili del problema di bancarotta:

$$x \in core(v_P) \iff \begin{cases} \sum_{i \in N} x_i = E \\ 0 \le x_i \le c_i, \qquad i \in N \end{cases}$$

"$\Rightarrow$" La prima è la condizione di efficienza

Per la seconda condizione per ogni $i \in N$ si ha $x_i \ge v_P(i) \ge 0$ e $E - x_i = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j \ge v_P(N \setminus \{i\}) \ge E - c_i \Rightarrow x_i \le c_i$

"$\Leftarrow$" La condizione di efficienza è ovviamente soddisfatta

Per ogni $S \subset N$ si hanno due casi:

1) se $v_P(S) = 0 \le \sum_{i \in S} x_i$

2) se $v_P(S) = E - \sum_{i \in N \setminus S} c_i \le E - \sum_{i \in N \setminus S} x_i = \sum_{i \in S} x_i$

3.3.2 Fixed tree game

Un insieme di agenti $N = \{1, ..., n\}$ è collegato alla sorgente di un servizio tramite una fissata connessione ad albero
Ciascun agente corrisponde ad un vertice dell'albero
Il servizio è pagato in base all'utilizzo ma restano i costi di manutenzione

E' possibile associare al problema il gioco TU (N, c), con:

$$c(S) = \min_{T \supseteq S} \left\{ \sum_{i \in T} c_i \right\} \qquad S \subseteq N$$

con $c_i =$ costo di manutenzione dell'unico arco entrante nel vertice associato al giocatore i e $T =$ componente connessa dell'albero contenente la sorgente

Il nucleo di un fixed tree game contiene le allocazioni che si ottengono ripartendo il costo di ciascun arco solo tra i giocatori della componente connessa non contenente la sorgente che si ottiene eliminando l'arco stesso

3.3.3 Weighted majority game

Problema di maggioranza pesata

$$\mathcal{W} = (N, w, q) = (q; w_1, ..., w_n)$$

dove	$N = \{1, ..., n\}$	insieme dei consiglieri
	$w = \{w_1, ..., w_n\}$	vettore dei "pesi"
	q	quota di maggioranza, con $q < \sum_{i \in N} w_i$

E' possibile associare al problema il gioco TU semplice 0-1 (N, v) con:

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sum_{i \in S} w_i > q \ \ S \text{ vincente} \\ 0 & \text{se } \sum_{i \in S} w_i \leq q \ \ S \text{ perdente} \end{cases}$$

Il gioco risulta monotono e se $q \geq \frac{1}{2} \sum_{i \in N} w_i$ allora se S è vincente $N \setminus S$ è perdente

Questi giochi sono più utilizzati nei consigli di amministrazione che in politica

Esempio 3.8 (Consiglio di sicurezza dell'ONU) *Il Consiglio di sicurezza dell'ONU è composto da cinque membri permanenti con diritto di veto e dieci membri eletti. Un provvedimento è approvato se riceve almeno 9 voti e nessun veto. Questo problema può essere rappresentato come un problema di maggioranza pesata in cui* $w_i = 1$ *se* i *è un membro eletto e* $w_i = 7$ *se* i *è un membro permanente e* $q = 38$ ♢

Un giocatore i è detto di veto se $v(S) = 0$ se $i \notin S$
Detto V l'insieme dei giocatori di veto e data una allocazione x tale che $\sum_{i \in N} x_i = 1, x_i \geq 0, i \in N$ si ha:

$$x \in core(v) \iff \sum_{i \in V} x_i = 1$$

"$\Rightarrow$" E' sufficiente verificare che $x_i = 0, i \in N \setminus V$
$i \in N \setminus V \Rightarrow v(N \setminus \{i\}) = 1$ (altrimenti i sarebbe di veto) per cui $\sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j = 1 \Rightarrow x_i = 0$

"$\Leftarrow$" Per ogni $S \subset N$ si hanno due casi:

1) $v(S) = 0 \leq \sum_{i \in S} x_i$

2) $v(S) = 1 \Rightarrow V \subseteq S \Rightarrow \sum_{i \in S} x_i \geq \sum_{i \in V} x_i = 1$

- Se il giocatore i è di veto non è vero che $i \in S \Rightarrow v(S) = 1$

3.3.4 Sequencing game

Problema di sequenziamento (ordinamento di operazioni)

$$\mathcal{S} = (N, \sigma_0, \alpha, s)$$

dove	$N = \{1, ..., n\}$	insieme degli agenti
	σ_0	ordine iniziale (permutazione)
	$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$	vettore dei costi per unità di tempo
	$s = (s_1, ..., s_n)$	vettore dei tempi di servizio

$$C_\sigma = \sum_{i \in N} \alpha_i \left(\sum_{j \in P(\sigma,i)} s_j + s_i \right)$$

dove $P(\sigma, i)$ è l'insieme degli agenti che precedono i nell'ordinamento σ
Smith (1956) ha dimostrato che l'ordinamento ottimale si può ottenere ordinando gli agenti secondo indici di urgenza $u_i = \frac{\alpha_i}{s_i}$, $i \in N$ debolmente decrescenti

Esempio 3.9 (Problema di sequenziamento) *Si consideri il problema di sequenziamento definito da* $N = \{1, 2, 3\}, \sigma_0 = (1, 2, 3), \alpha = (5, 9, 8), s = (5, 3, 4)$*; il costo iniziale è* $C_{\sigma_0} = 25 + 72 + 96 = 193$ *e gli indici di urgenza sono* $u = (1, 3, 2)$*, per cui* $\sigma^* = (2, 3, 1)$ *con costo* $C_{\sigma^*} = 27 + 56 + 60 = 143$ $\diamondsuit$

E' possibile associare al problema il gioco TU semplice (N, v) con v definita nel modo seguente:

- una coalizione $T \subseteq N$ è detta connessa secondo σ se per ogni $i, j \in T$ e $k \in N$ si ha $\sigma(i) < \sigma(k) < \sigma(j) \Rightarrow k \in T$
- scambiando due giocatori i, j la variazione di costo è $\alpha_j s_i - \alpha_i s_j$; la variazione è positiva se e solo se $u_i < u_j$; se la variazione è negativa non si ha lo scambio
- il guadagno di uno scambio è $g_{ij} = max\{0, \alpha_j s_i - \alpha_i s_j\}$, quindi il guadagno di una coalizione T connessa secondo σ è $v(T) = \sum_{j \in T} \sum_{i \in P(\sigma,j) \cap T} g_{ij}$
- data una coalizione $S \subseteq N$, l'ordine σ induce una partizione in componenti connesse, S/σ

$$v(S) = \sum_{T \in S/\sigma} v(T) \qquad S \subset N$$

Esempio 3.10 (Sequencing game) *Riferendosi all'Esempio 3.9 si ha:*

S	1	2	3	12	13	23	123
$v(S)$	0	0	0	30	0	0	50

$v(23) = 0$ *poichè lo scambio produrrebbe una perdita, in quanto* $u_2 > u_3$
$v(13) = 0$ *perchè la coalizione non è connessa e i giocatori* 1 *e* 3 *non possono scambiarsi anche se otterrebbero un guadagno di 20 e il giocatore* 2 *avrebbe un guadagno, poichè il tempo di servizio di* 3 *è 4 e quello di* 1 *è 5* $\diamondsuit$

$$EGS_i = \frac{1}{2} \sum_{k \in P(\sigma,i)} g_{ki} + \frac{1}{2} \sum_{j: i \in P(\sigma,j)} g_{ij} \qquad \forall i \in N$$

Esempio 3.11 (EGS-Rule) *Riferendosi all'Esempio 3.9 i guadagni g_{ij} sono:*

ij	12	13	21	23	31	32
g_{ij}	30	20	0	0	0	12

e conseguentemente

$$EGS_1 = \frac{1}{2}(g_{12} + g_{13}) = 25$$
$$EGS_2 = \frac{1}{2}g_{12} + \frac{1}{2}g_{23} = 15$$
$$EGS_3 = \frac{1}{2}(g_{13} + g_{23}) = 10$$

$\diamondsuit$

- EGS non è simmetrica per i giocatori 1 e 2 che sono simmetrici per il gioco ma non per il problema associato; infatti 1 può scambiarsi vantaggiosamente sia con 2 che con 3, mentre 2 può scambiarsi vantaggiosamente solo con 1
- g_{21}, g_{31}, g_{32} non vengono utilizzati perchè l'ordine iniziale dato non permette questi scambi
- Una variante è $EGS_i^{\varepsilon} = \varepsilon \sum_{k \in P(\sigma,i)} g_{ki} + (1-\varepsilon) \sum_{j: i \in P(\sigma,j)} g_{ij}, \forall i \in N, \forall \varepsilon \in [0,1]$

3.3.5 Production game

Problema di produzione

$$\mathcal{P} = (N, A, (b^i)_{i \in N}, c)$$

dove	$N = \{1, ..., n\}$	insieme degli agenti
	A	matrice tecnologica del processo produttivo
	b^i	vettore delle risorse dell'agente i
	c	vettore dei prezzi dei beni prodotti

E' possibile associare al problema il gioco TU (N, v), dove:

$$v(S) = max\ \{c^T z | Az \leq b^S, z \geq 0\} \qquad S \subseteq N$$

con $b^S = \sum_{i \in S} b^i$ rappresenta le risorse possedute dalla coalizione S

Il nucleo di un gioco di produzione contiene le imputazioni x tali che $x_i = b^{iT} u^*$ dove u^* è una soluzione ottimale del duale del problema di produzione:

$$\begin{aligned} max\ & c^T z \\ s.t.\ & Az \leq b^N \\ & z \geq 0 \end{aligned}$$

- Il risultato precedente può essere esteso a tutti i giochi originati da un problema lineare (Teorema di Owen, 1975)

3.3.6 Assignment game

Problema di assegnazione

$$\mathcal{A} = (N^v, N^c, A, B)$$

dove	$N^v = \{1, ..., n^v\}$	insieme dei venditori
	$N^c = \{1, ..., n^c\}$	insieme dei compratori
	A	vettore; a_j = valutazione che $j \in N^v$ da al proprio oggetto
	B	matrice; b_{ij} = valutazione che $i \in N^c$ da all'oggetto di $j \in N^v$

- Gli oggetti non hanno un prezzo di mercato
- Ciascun venditore possiede un solo oggetto
- Ciascun compratore può acquistare un solo oggetto

E' possibile associare al problema il gioco TU semplice (N, v) con:

$$N = N^v \cup N^c$$

e v è definita nel modo seguente:

- Se $i^* \in N^c$ e $j^* \in N^v$:

$$v(i^* j^*) = c_{i^* j^*} = \begin{cases} b_{i^* j^*} - a_{j^*} & \text{se } b_{i^* j^*} - a_{j^*} \geq 0 \\ 0 & \text{se } b_{i^* j^*} - a_{j^*} < 0 \end{cases}$$

- Se S contiene più compratori che venditori, detto $i(j) \in S \cap N^c$ il compratore dell'oggetto offerto da $j \in S \cap N^v$:

$$v(S) = max \sum_{j \in S \cap N^v} c_{i(j),j}$$

- Se S contiene più venditori che compratori, detto $j(i) \in S \cap N^v$ il venditore dell'oggetto acquistato da $i \in S \cap N^c$:

$$v(S) = max \sum_{i \in S \cap N^c} c_{i,j(i)}$$

I valori c_{ij} definiscono il problema di assegnazione:

$$\begin{array}{lll} max\ \ z = \displaystyle\sum_{i\in N^c, j\in N^v} c_{ij}x_{ij} & & \\ s.t. \quad \displaystyle\sum_{i\in N^c} x_{ij} \leq 1 & & \forall\ j \in N^v \\ \qquad\ \ \displaystyle\sum_{j\in N^v} x_{ij} \leq 1 & & \forall\ i \in N^c \\ \qquad\ \ x_{ij} \in \{0,1\} & & \forall\ i \in N^c, j \in N^v \end{array}$$

dove $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ e } j \text{ si accordano} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Per il teorema di Owen il nucleo contiene le imputazioni ottenute da una soluzione ottimale del duale:

$$\begin{array}{lll} min\ \ w = \displaystyle\sum_{j\in N^v} y_j^v + \sum_{i\in N^c} y_i^c & & \\ s.t. \quad y_j^v + y_i^c \geq c_{ij} & & \forall\ j \in N^v, \forall\ i \in N^c \end{array}$$

- Le soluzioni ottimali duali devono avere le componenti non negative per la razionalità individuale. Se $(\bar{y}_1^v, ..., \bar{y}_{n^v}^v, \bar{y}_1^c, ..., \bar{y}_{n^c}^c)$ è una soluzione ottimale e supponendo, senza perdita di generalità, che corrisponda all'assegnazione di k oggetti ($k \leq min\ \{n, m\}$) tra le coppie venditore-compratore 1-1, 2-2, ..., k-k, allora è ottimale anche $(\bar{y}_1^v + \alpha_1, ..., \bar{y}_k^v + \alpha_k, ..., \bar{y}_{n^v}^v, \bar{y}_1^c - \alpha_1, ..., \bar{y}_k^c - \alpha_k, ..., \bar{y}_{n^c}^c)$, $\forall\ (\alpha_1, ..., \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$

Esempio 3.12 (Gioco di assegnazione) *Ci sono tre giocatori, 1 (venditore, $a_1 = 10$), 2 e 3 (compratori, $b_{21} = 12, b_{31} = 15$)*

$$v(1) = v(2) = v(3) = v(23) = 0; v(12) = 2; v(13) = v(N) = 5$$

$$core(v) = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_1 = \alpha, x_2 = 0, x_3 = 5 - \alpha, 2 \leq \alpha \leq 5\}$$

L'oggetto non viene venduto a 2 e il payoff di 1 e 3 dipende da come si accordano, ma l'utilità di 1 è almeno 2 unità. In altre parole il prezzo di vendita è almeno 12 (1 può accordarsi con 2), ma non più di 15 (3 si ritira)
Se $\bar{b}_{21} = 15$ allora $core(v) = \{(5, 0, 0)\}$ cioè il prezzo di vendita è 15 (legge della domanda e dell'offerta) $\diamondsuit$

- Considerazioni economiche

  1. La legge dell'equilibrio tra domanda e offerta dice che il prezzo deve far síche la domanda sia uguale all'offerta, per cui se il prezzo dell'oggetto fosse inferiore a 12 vi sarebbero due acquirenti mentre se il prezzo fosse superiore a 15 non vi sarebbero acquirenti
  2. Le leggi economiche non escludono, come il nucleo, un'utilità positiva per il giocatore 2; infatti il giocatore 1 potrebbe offrire al giocatore 2 parte della sua utilità in cambio di un'offerta maggiore per far sí che il prezzo pagato dal giocatore 3 sia più alto oppure il giocatore 3 potrebbe offrire al giocatore 2 parte della sua utilità in cambio del suo ritiro per far sí che il prezzo pagato al giocatore 1 sia più basso

4 Soluzioni puntuali di un gioco TU

Prendono frequentemente il nome di *indici di potere* o *valori* perchè permettono di identificare il "potere" di ciascun giocatore all'interno del gioco
Il termine "indice di potere" si usa per i giochi semplici, mentre per un gioco qualsiasi si preferisce il termine "valore"

4.1 Valore di Shapley (1953)

Si basa sul *contributo marginale* di ogni giocatore

Definizione 4.1 *Si chiama valore di Shapley il vettore $\phi(v)$ la cui componente ϕ_i è il contributo marginale medio del giocatore i rispetto alle possibili permutazioni dei giocatori, cioè:*

$$\phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} [v(P(\pi, i) \cup \{i\}) - v(P(\pi, i))]$$

dove $n = |N|$, π è una permutazione di N e $P(\pi, i)$ è l'insieme dei giocatori che precedono i nella permutazione π

Il valore di Shapley per un gioco cooperativo esiste ed è unico

Se il gioco è superadditivo (subadditivo per un cost game) il valore di Shapley è un'imputazione:

$$\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N)$$
$$\phi_i(v) \geq v(i) \qquad \forall i \in N$$

ma non è necessariamente un elemento del nucleo

Se il gioco è convesso (concavo per un cost game) il valore di Shapley è un elemento del nucleo

Esempio 4.1 (Gioco di assegnazione) *Riferendosi all'Esempio 3.12, dove* $v(1) = v(2) = v(3) = v(23) = 0; v(12) = 2; v(13) = v(123) = 5$ *il valore di Shapley value è dato da:*

	Contributi marginali		
Permutazioni	*Giocatore* 1	*Giocatore* 2	*Giocatore* 3
1 2 3	$v(1) - v(\emptyset) = 0$	$v(12) - v(1) = 2$	$v(123) - v(12) = 3$
1 3 2	$v(1) - v(\emptyset) = 0$	$v(123) - v(13) = 0$	$v(13) - v(1) = 5$
2 1 3	$v(12) - v(2) = 2$	$v(2) - v(\emptyset) = 0$	$v(123) - v(12) = 3$
2 3 1	$v(123) - v(23) = 5$	$v(2) - v(\emptyset) = 0$	$v(23) - v(2) = 0$
3 1 2	$v(13) - v(3) = 5$	$v(123) - v(13) = 0$	$v(3) - v(\emptyset) = 0$
3 2 1	$v(123) - v(23) = 5$	$v(23) - v(3) = 0$	$v(3) - v(\emptyset) = 0$
ϕ_i	$\frac{17}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{11}{6}$

Il valore di Shapley riflette il valore economico del giocatore 2. $\diamondsuit$

4.1.1 Assiomi di Shapley

ϕ è l'unico vettore efficiente che soddisfa i seguenti assiomi:

1. Simmetria
   Se due giocatori i, j sono simmetrici, cioè vale la proprietà $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}), \forall\ S \subseteq N \setminus \{i, j\}$ allora $\phi_i(v) = \phi_j(v)$

2. Dummy player
   Sia i un giocatore fittizio, cioè che ad ogni coalizione aggiunge solo il suo valore $v(i)$:

$$v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(i) \quad \forall\ S \subseteq N \setminus \{i\}$$

   Il valore di Shapley del giocatore i è il suo valore, cioè $\phi_i(v) = v(i)$

3. Additività o indipendenza (assioma controverso)
   Dati due giochi u e v, sia $(u + v)$ il gioco somma definito da:

$$(u + v)(S) = u(S) + v(S), \quad \forall\ S \subseteq N$$

   Il valore di Shapley del gioco somma è dato dalla somma dei valori di Shapley, cioè $\phi_i(u+v) = \phi_i(u) + \phi_i(v), \forall\ i \in N$

Esempio 4.2 (Giocatori simmetrici e giocatore fittizio) *Sia dato il gioco* $G = (N, v)$ *dove:*

$$N = \{1, 2, 3\}$$
$$v(1) = v(2) = v(3) = 1; v(12) = 4; v(13) = v(23) = 2; v(N) = 5$$

I giocatori 1 e 2 sono simmetrici e il giocatore 3 è fittizio, allora $\phi_3(v) = v(3) = 1$ *e* $\phi_1(v) = \phi_2(v) = \frac{1}{2}(v(N) - v(3)) = 2$ *e quindi* $\phi(v) = (2, 2, 1)$ $\diamondsuit$

- L'assioma di simmetria può essere sostituito dall'assioma di *anonimato*:
  Dato un gioco v e una permutazione dei giocatori π sia u il gioco definito da:
  $$u(\pi(S)) = v(S) \quad \forall\, S \subseteq N$$
  Il valore di Shapley del gioco ottenuto permutando i giocatori è dato dalla permutazione dei valori di Shapley, cioè $\phi_{\pi(i)}(u) = \phi_i(v)$

- L'assioma di dummy player può essere sostituito dall'assioma di *null player*:
  Un giocatore $i \in N$ è un null player se $v(S \cup \{i\}) = v(S), \forall\, S \subseteq N \setminus \{i\}$; allora $\phi_i(v) = 0$
  $v(i) = v(\emptyset \cup \{i\}) = v(\emptyset) = 0$ e quindi ancora $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(i), \forall\, S \subseteq N \setminus \{i\}$

4.1.2 Calcolo del valore di Shapley

Il valore di Shapley risulta molto complesso da calcolare

Definizione

E' necessario determinare i contributi marginali dei giocatori nelle $n!$ possibili coalizioni ordinate
Con 10 giocatori, per ogni giocatore ci sono $10! = 3.628.800$ permutazioni

Semplificazione

Considerare le possibili $2^n - 1$ coalizioni non vuote e per ciascuna considerare ogni giocatore come l'ultimo arrivato e quindi "pesare" il suo contributo marginale con le permutazioni degli altri giocatori della coalizione e dei giocatori non facenti parte della coalizione:

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}[v(S) - v(S \setminus \{i\})]$$

Con 10 giocatori ci sono $2^{10} - 1 = 1.023$ coalizioni

Formule "ad hoc"

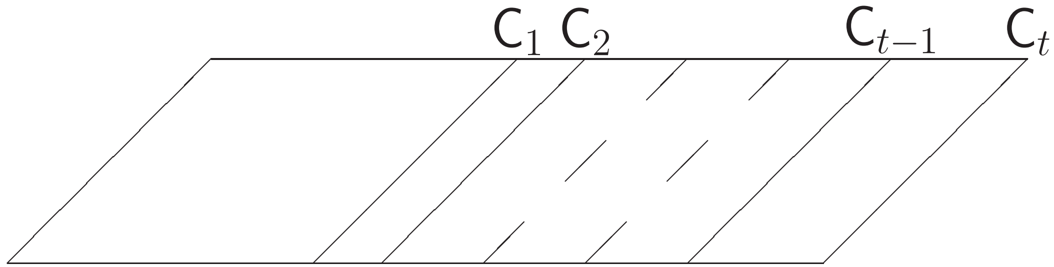
Sfruttare le caratteristiche di alcune classi di giochi

Gioco dell'aeroporto (Airport game - Littlechild e Thompson, 1977)

Ripartire il costo di costruzione e manutenzione della pista tra differenti tipi di aerei

Gli aerei sono raggruppati in t sottoinsiemi disgiunti $N_1, \ldots, N_t$

Gli aerei di N_i richiedono una pista di costo C_i con $C_i < C_{i+1}$



Si definisce il gioco:

$$v(S) = C_{j(S)}$$

dove $j(S) = max\ \{i|S \cap N_i \neq \emptyset\}$

Il valore di Shapley di ogni aereo corrisponde alla seguente ripartizione dei costi:

- Il costo del primo tratto di pista C_1 è diviso tra tutti gli aerei, poichè tutti lo utilizzano;
- Il costo del secondo tratto di pista $C_2 - C_1$ è diviso tra gli aerei dei sottoinsiemi $N_2, \ldots, N_t$ che sono quelli che lo utilizzano;
- Il costo dell'ultimo tratto di pista $C_t - C_{t-1}$ che è diviso tra gli aerei del sottoinsieme N_t che sono gli unici che lo utilizzano.

Questo criterio è facilmente applicabile anche nel caso di molti aerei

Esempio 4.3 (Gioco dell'aeroporto)

$$\begin{aligned}
&N_1 = \{1,2,3\}; N_2 = \{4,5,6,7\}; N_3 = \{8,9,10\}\\
&C_1 = 20; C_2 = 27; C_3 = 33\\
&\phi_1 = \tfrac{20}{10} = 2\\
&\phi_2 = \tfrac{20}{10} + \tfrac{27-20}{7} = 3\\
&\phi_3 = \tfrac{20}{10} + \tfrac{27-20}{7} + \tfrac{33-27}{3} = 5
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

La verifica utilizza gli assiomi di Shapley (Littlechild e Owen, 1973)
Si definiscono t giochi $v_1, \ldots, v_t$ con il gioco v_i relativo al tratto di pista i:

$$v_i(S) = \begin{cases} C_i - C_{i-1} & se\ i \leq j(S) \\ 0 & se\ i > j(S) \end{cases}$$

dove $C_0 = 0$
A questo punto si osserva che:

1. gli aerei di $N_1, \ldots, N_{i-1}$ sono dummy per il gioco v_i
2. gli aerei di $N_i, \ldots, N_t$ sono simmetrici per il gioco v_i
3. v è dato dalla somma dei giochi v_i

4.1.3 Un'applicazione del valore di Shapley

Esempio 4.4 (Consiglio dell'UE 1958-1973) *Il valore di Shapley permette di evidenziare un difetto nei pesi assegnati nel Consiglio dell'UE del 1958*
quota (1958) = 12; quota (1973) = 41

	1958			1973		
Paesi	Peso	%	Shapley	Peso	%	Shapley
Francia	4	23.53	0.233	10	17.24	0.179
Germania	4	23.53	0.233	10	17.24	0.179
Italia	4	23.53	0.233	10	17.24	0.179
Belgio	2	11.76	0.150	5	8.62	0.081
Paesi Bassi	2	11.76	0.150	5	8.62	0.081
Lussemburgo	1	5.88	0.000	2	3.45	0.010
Regno Unito	-	-	-	10	17.24	0.179
Danimarca	-	-	-	3	5.17	0.057
Irlanda	-	-	-	3	5.17	0.057
Totale	17	100.00	1.000	58	100.00	1.000

◇

4.2 Nucleolo (Schmeidler, 1969)

Si basa sull'idea di minimizzare il massimo "malcontento"

Definizione 4.2 *Dato un gioco v, sia S una coalizione e x una possibile ripartizione del valore del gioco; si dice rimpianto o eccesso di S rispetto ad x la quantità:*

$$e(S,x) = v(S) - x(S)$$

Nel caso di un cost game il rimpianto è $x(S) - c(S)$

- Nella definizione precedente x è una ripartizione del valore del gioco in quanto deve soddisfare solo l'ipotesi di efficienza; in questo caso talvolta si usano i termini preimputazione e prenucleolo per indicare che non si tiene conto della razionalità individuale

E' possibile definire il vettore $\vartheta(x) \in \mathbb{R}^{2^n}$:

$$\vartheta_1(x) = max\ \{e(S,x)|S \subset N\} = e(S_1,x)$$
$$\vartheta_i(x) = max\ \{e(S,x)|S \subset N, S \neq S_j, j = 1,\ldots,i-1\} = e(S_i,x) \qquad i = 2,\ldots,2^n$$

Le componenti di $\vartheta(x)$ sono i rimpianti generati da x al variare di S, in ordine debolmente decrescente

Esempio 4.5 (Vettore degli eccessi) *Sia dato il gioco:*

$$N = \{1, 2, 3\}$$
$$v(1) = v(2) = v(3) = 0; v(12) = 2; v(13) = v(23) = 3; v(N) = 5$$

Data la ripartizione $x = (3, 1, 1)$ *si ha:*

$$e(1, x) = -3; e(2, x) = -1; e(3, x) = -1; e(12, x) = -2; e(13, x) = -1; e(23, x) = 1; e(N, x) = 0$$

e quindi:

$$\vartheta(x) = (1, 0, -1, -1, -1, -2, -3)$$

$\diamondsuit$

Definizione 4.3 *Dati due vettori* $x, y \in \mathbb{R}^n$*, si dice che* x *è lessicograficamente minore di* y *e si indica con* $x <_L y$*, se esiste* $i \geq 1$ *per cui:*

$$\begin{aligned} x_j &= y_j \qquad j < i \\ x_i &< y_i \end{aligned}$$

Definizione 4.4 *Dato un gioco* v *si dice nucleolo del gioco il vettore* $\nu(X)$ *che genera il minimo, secondo l'ordine lessicografico, dei vettori* $\vartheta(x)$ *al variare di* x *nell'insieme* X *delle possibili ripartizioni*

- Il nucleolo è un elemento del nucleo se è non vuoto, per cui costituisce un concetto di soluzione per i giochi a nucleo vuoto, ma permette anche di "scegliere" un elemento del nucleo

Esempio 4.6 (Ordine lessicografico) *Sia dato il seguente gioco:*

$$N = \{1, 2\}$$
$$v(1) = 1; v(2) = 3; v(12) = 8$$

Dati $x = (6, 2)$ *e* $y = (3, 5)$ *si ha:*

$$e(1, x) = -5; e(2, x) = 1; e(12, x) = 0$$
$$e(1, y) = -2; e(2, y) = -2; e(12, y) = 0$$

e quindi $\vartheta(x) = (1, 0, -5)$ *e* $\vartheta(y) = (0, -2, -2)$ *per cui* $\vartheta(y) <_L \vartheta(x)$
Si può verificare che $y = \nu(X)$ $\diamondsuit$

Proprietà

Se X è non vuoto, compatto e convesso allora $\nu(X)$ esiste ed è unico

5 Allocazione di costi

E' una delle prime applicazioni della Teoria dei Giochi (anni '30 Tennessee Valley Authority)

Ripartizione dei costi di un progetto tra i diversi utenti, tenendo conto del diverso ruolo e dei differenti interessi

Esiste anche il problema corrispondente di allocazione di profitti

- Concetti di soluzione precedentemente esposti
- Concetti di soluzione o metodi dei costi separabili

5.1 Metodi dei costi separabili

Definizione 5.1

- *Dato un gioco di costi o cost game* c *si chiama costo separabile del giocatore* i *il suo contributo marginale o costo marginale:*

$$m_i = c(N) - c(N \setminus \{i\})$$

- *Se la somma dei costi separabili dei giocatori è minore del costo del gioco si chiama costo non separabile del gioco la differenza tra i due valori, cioè:*

$$g(N) = c(N) - \sum_{i \in N} m_i$$

I metodi si differenziano per come viene ripartito il costo non separabile

5.1.1 Equa ripartizione (ECA)

$g(N)$ viene ripartito in parti uguali

$$ECA_i = m_i + \frac{1}{n} g(N)$$

5.1.2 Costi di alternativa risparmiati (ACA)

$g(N)$ viene ripartito proporzionalmente al risparmio ottenuto per aver pagato il proprio costo separabile invece del costo

$$ACA_i = m_i + \frac{r_i}{\sum_{j \in N} r_j} g(N)$$

dove $r_i = c(i) - m_i$

5.1.3 Cost Gap (CGA)

$g(N)$ viene ripartito proporzionalmente al migliore (minimo) massimo contributo che ciascuno è disposto a pagare facendo parte di una coalizione

$$CGA_i = m_i + \frac{g_i}{\sum_{j \in N} g_j} g(N)$$

dove $g_i = min \{g(S) | i \in S\}$ e $g(S) = c(S) - \sum_{i \in S} m_i$

- Esiste un altro concetto di soluzione equivalente al CGA, il valore τ, introdotto da Tijs nel 1981, definito da $\tau = \alpha m + (1-\alpha)M$, dove $m_i = c(N) - c(N \setminus \{i\}), \forall\ i \in N$ (utopia = miglior payoff per ogni singolo giocatore), $M_i = min\ \{c(S) - \sum_{j \in S \setminus \{i\}} m_j | i \in S, S \subseteq N\}, \forall\ i \in N$ (peggior payoff per ogni singolo giocatore) e α è tale che $\sum_{i \in N} \tau_i = c(N)$ che si basa su principi differenti; questo fatto rafforza reciprocamente i due concetti di soluzione.

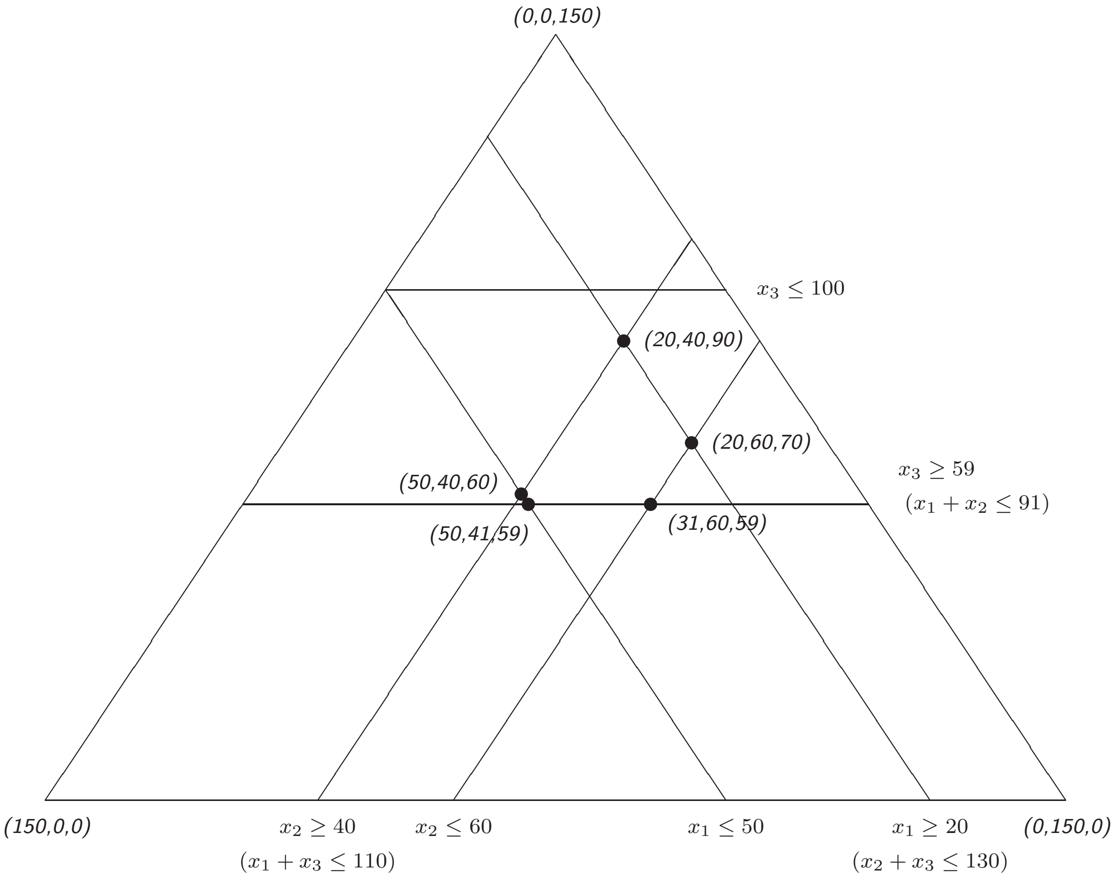
- Il valore τ richiede che il gioco sia *quasi-bilanciato*, cioè valgano le seguenti condizioni:
  1 - $m_i \leq M_i, \forall\ i \in N$
  2 - $\sum_{i \in N} m_i \leq c(N) \leq \sum_{i \in N} M_i$

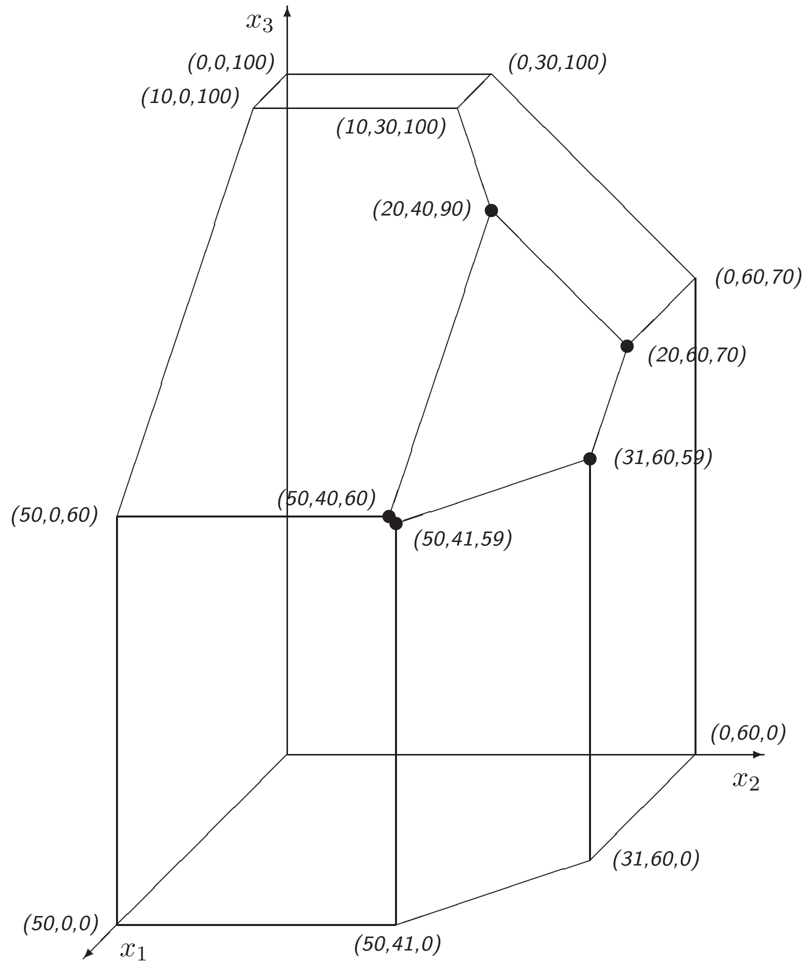
- Per un gioco di profitti il vettore utopia è definito come $M_i = v(N) - v(N \setminus \{i\})$ e il peggior payoff come $m_i = max\ \{v(S) - \sum_{j \in S \setminus \{i\}} M_j | i \in S, S \subseteq N\}, \forall\ i \in N$.

Esempio 5.1 (Allocazione di costi) *Sia dato il seguente gioco* $< N, c >$*:*

$N = \{1, 2, 3\}$

$c(1) = 50; c(2) = 60; c(3) = 100; c(12) = 91; c(13) = 110; c(23) = 130; c(N) = 150$





Costi separabili

$$m_1 = c(N) - c(N \setminus \{1\}) = 150 - 130 = 20$$
$$m_2 = c(N) - c(N \setminus \{2\}) = 150 - 110 = 40$$
$$m_3 = c(N) - c(N \setminus \{3\}) = 150 - 91 = 59$$

Costo non separabile

$$g(N) = c(N) - \sum_{i \in N} m_i = 150 - (20 + 40 + 59) = 31$$

Risparmi

$$r_1 = c(1) - m_1 = 50 - 20 = 30$$
$$r_2 = c(2) - m_2 = 60 - 40 = 20$$
$$r_3 = c(3) - m_3 = 100 - 59 = 41$$

Costi non separabili delle coalizioni

$$g(1) = c(1) - m_1 = 50 - 20 = 30$$
$$g(2) = c(2) - m_2 = 60 - 40 = 20$$
$$g(3) = c(3) - m_3 = 100 - 59 = 41$$
$$g(12) = c(12) - (m_1 + m_2) = 91 - (20 + 40) = 31$$
$$g(13) = c(13) - (m_1 + m_3) = 110 - (20 + 59) = 31$$
$$g(23) = c(23) - (m_2 + m_3) = 130 - (40 + 59) = 31$$

Minimi costi non separabili

$$g_1 = min\{g(1), g(12), g(13), g(N)\} = min\{30, 31, 31, 31\} = 30$$
$$g_2 = min\{g(2), g(12), g(23), g(N)\} = min\{20, 31, 31, 31\} = 20$$
$$g_3 = min\{g(3), g(13), g(23), g(N)\} = min\{40, 31, 31, 31\} = 31$$

ECA

$$x_1 = m_1 + \frac{1}{n}g(N) = 20 + \frac{1}{3}31 = 30.333$$
$$x_2 = m_2 + \frac{1}{n}g(N) = 40 + \frac{1}{3}31 = 50.333$$
$$x_3 = m_3 + \frac{1}{n}g(N) = 59 + \frac{1}{3}31 = 69.333$$

ACA

$$x_1 = m_1 + \frac{r_1}{r_1+r_2+r_3}g(N) = 20 + \frac{30}{91}31 = 30.220$$
$$x_2 = m_2 + \frac{r_2}{r_1+r_2+r_3}g(N) = 40 + \frac{20}{91}31 = 46.813$$
$$x_3 = m_3 + \frac{r_3}{r_1+r_2+r_3}g(N) = 59 + \frac{41}{91}31 = 72.967$$

CGA

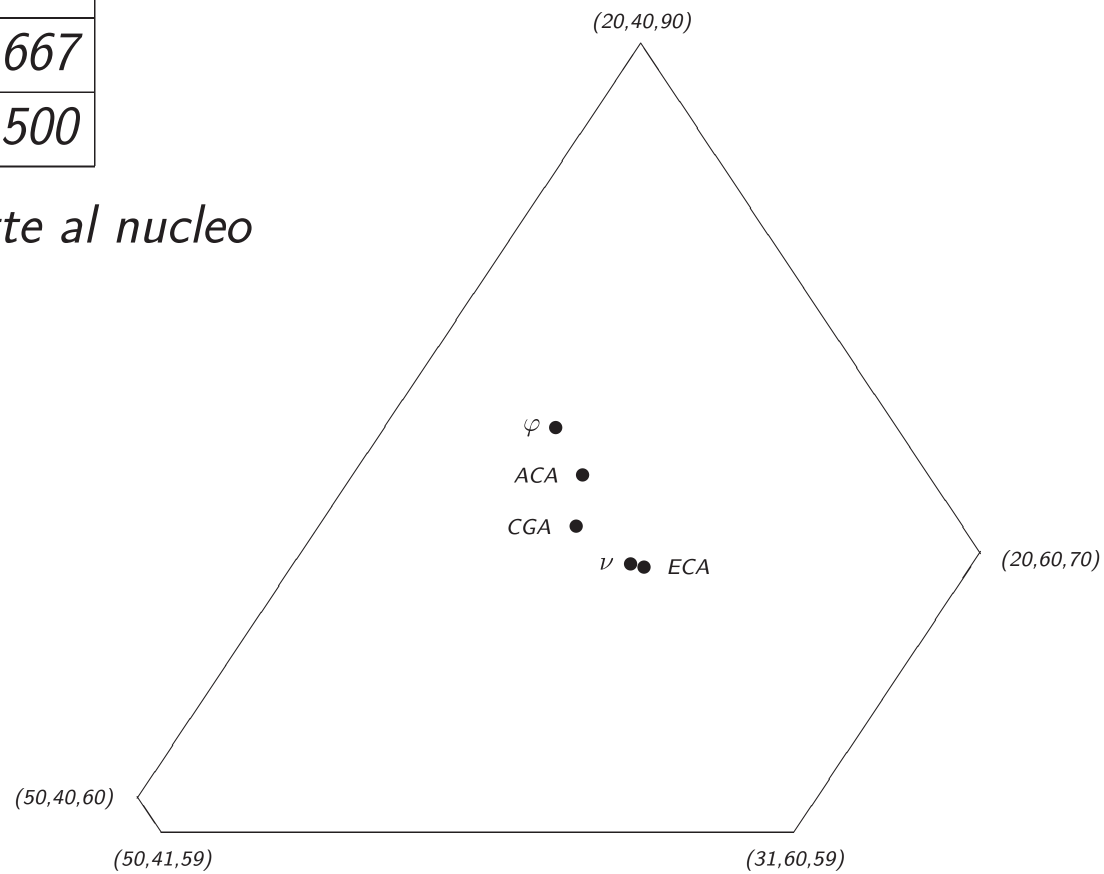
$$x_1 = m_1 + \frac{g_1}{g_1+g_2+g_3}g(N) = 20 + \frac{30}{81}31 = 31.481$$
$$x_2 = m_2 + \frac{g_2}{g_1+g_2+g_3}g(N) = 40 + \frac{20}{81}31 = 47.654$$
$$x_3 = m_3 + \frac{g_3}{g_1+g_2+g_3}g(N) = 59 + \frac{31}{81}31 = 70.864$$

Valore Shapley

Permutazioni	Contributi marginali		
1 2 3	50	41	59
1 3 2	50	40	60
2 1 3	31	60	59
2 3 1	20	60	70
3 1 2	10	40	100
3 2 1	20	30	100
Valore di Shapley	30.167	45.167	74.667

	Allocazioni		
Criterio	x_1	x_2	x_3
ECA	30.333	50.333	69.333
ACA	30.220	46.813	72.967
CGA	31.481	47.654	70.864
Valore di Shapley	30.167	45.167	74.667
Nucleolo (ν)	30.500	50.000	69.500

Le allocazioni proposte appartengono tutte al nucleo



◊