Giochi semplici e indici di potere

Appunti a cura di
Stefano Moretti e Fioravante Patrone

1 Coalizioni vincenti e perdenti

In Sociologia e nelle Scienze Politiche, i giochi cooperativi ad utilità trasferibile sono stati utilizzati per studiare svariati contesti decisionali che comprendono al loro interno uno scrutinio elettorale.
Si consideri un dato insieme N di n "giocatori": possono essere individui, città, partiti, azionisti, condomini.
Si immagini una regola la quale dice quale requisito debba soddisfare un gruppo di giocatori per essere in grado di far passare una decisione.
In questo contesto è naturale pensare ad un gioco in cui ogni gruppo è o vincente o perdente, nel senso che o ottiene di far passare la propria decisione o non ottiene di farla passare.
Per questo tipo di situazioni, la teoria ci fornisce un modello che è proprio di una data classe di giochi cooperativi: i *giochi semplici*.
L'idea è quella di costruire un gioco in cui ogni coalizione S è o vincente ($\nu(S) = 1$) o perdente ($\nu(S) = 0$), in altre parole la sua funzione caratteristica sia definita come $\nu : \mathcal{P}(N) \to \{0, 1\}$.
Possiamo allora dire:

Definizione 1.1 Un gioco si dice *semplice* se:

1. $\forall S \subseteq N$, si ha $\nu(S) = 0$ oppure $\nu(S) = 1$.
2. $\nu(N) = 1$.

■

L'interpretazione è che la coalizione S con valore 1 possa decidere sul problema sotto considerazione senza l'aiuto dei giocatori al di fuori di S. Per questo motivo, queste coalizioni sono chiamate *vincenti*. Si noti che nella definizione di gioco semplice, la coalizione N di tutti i giocatori è in grado di aggiudicarsi 1. Questo, nel contesto decisionale a cui ci si riferiva all'inizio di questo paragrafo, potrebbe essere interpretato come il fatto che il gruppo formato da tutti i giocatori riesce sempre a soddisfare il requisito per far passare la propria decisione.
In letteratura è possibile trovare definizioni diverse di gioco semplice. Per esempio, una molto diffusa è quella che definisce gioco semplice come gioco che soddisfi il solo requisito 1 della definizione 1.1, introducendo il requisito

2 nella definizione di un'ulteriore sottoclasse di giochi semplici, i *giochi di controllo*. Noi comunque indicheremo giochi semplici quelli definiti come in 1.1.
Senza nessuna ulteriore specificazione, è quindi anche possibile che, per esempio, se una coalizione $S \subseteq N$ è vincente, anche la sua complementare in N, cioè $N \setminus S$ sia a sua volta vincente.

Esercizio 1.1 *Descrivere un gioco semplice $G = (N, v)$, dove N è l'insieme degli n giocatori del gioco G, in cui una qualsiasi coalizione è vincente se possiede il* consenso unanime *di tutti i giocatori appartenenti ad un gruppo $U \subseteq N$, dove U è una coalizione fissata avente un numero di giocatori strettamente maggiore di* 1.

Dovrebbe essere chiara, a questo punto, la portata dei giochi semplici nello studio, soprattutto, delle scienze politiche. Ma se ancora non lo è si consideri la seguente particolare classe di giochi semplici: i *giochi di maggioranza pesata*.

Definizione 1.2 Sia $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ un vettore di componenti non negative e sia $q \in I\!R$ t.c.

$$0 < q < \sum_{i=1}^{n} p_i \tag{1}$$

Allora si definisce *gioco di maggioranza pesata* $[q; p_1, p_2, \ldots, p_n]$ il gioco semplice (N, v) definito da:

$$v(S) = \begin{cases} 0 & \text{se } \sum_{i \in S} p_i \leq q \\ \\ 1 & \text{se } \sum_{i \in S} p_i > q \end{cases} \tag{2}$$

■

Un'interpretazione può essere la seguente: i giocatori sono n partiti politici aventi rispettivamente $p_1, p_2, \ldots, p_n$ seggi in parlamento e q il "quorum", cioè il numero minimo di voti necessario per approvare una legge.
Si noti nella definizione 1.2 il segno di maggiore stretto come criterio di attribuzione del valore 1 ad una coalizione generica S. Per quanto ragionevole (si pensi ad esempio alla frase "maggioranza della metà più uno"), tale criterio non è affatto scontato. Anzi, è molto facile in letteratura (si veda ad esempio il libro di Owen), trovare definizioni di giochi di maggioranza pesata con funzioni caratteristiche che prevedono valore zero per la coalizione la cui somma dei pesi è strettamente minore alla quota di maggioranza e valore pari a uno per la coalizione la cui somma dei pesi sia maggiore o uguale alla stessa quota. Cambia qualcosa? Ovviamente sì , dato che le due definizioni sono diverse. C'è però un'ulteriore aspetto interessante legato alle due diverse formulazioni di gioco di maggioranza: dato un gioco di maggioranza definito

in uno dei due modi, è sempre possibile indicare una quota in grado di rappresentare lo stesso gioco secondo l'altra definizione? L'esempio seguente illustra in una specifica situazione il precedente interrogativo.

Esempio 1.1 *Sia* $G =< \{1,2,3\}, v >$ *un gioco di maggioranza secondo la definizione 1.2 con una struttura di pesi e quota pari a* $[2; 1, 1, 1]$. *Tale struttura determina la funzione caratteristica che assume i seguenti valori:*
$v(\emptyset) = 0; v(1) = 0; v(1,2) = 0; v(2) = 0; v(2,3) = 0; v(1,2,3) = 1; v(1,3) = 0; v(3) = 0$
La stessa struttura di pesi e la stessa quota, secondo la definizione alternativa, cioè quella che assegna il valore 1 *ad una generica coalizione qualora venga raggiunta o superata la quota di maggioranza e il valore* 0 *qualora la stessa non venga raggiunta, determina invece un gioco la cui funzione caratteristica risulta* $v(\emptyset) = 0; v(1) = 0; v(1,2) = 1; v(2) = 0; v(2,3) = 1; v(1,2,3) = 1; v(1,3) = 1; v(3) = 0$
I due giochi non sono gli stessi, ce lo aspettavamo. In questo secondo contesto, dove si guadagna 1 *anche in corrispondenza del raggiungimento della quota* $q = 2$, *anche le coalizioni con due giocatori sono vincenti. È però interessante notare che in questa seconda tipologia di giochi di maggioranza, è possibile descrivere il gioco ottenuto in base alla definizione 1.2 semplicemente attribuendo il valore* $2 + \delta$ *alla quota di maggioranza, con* $\delta \in (0, 1]$. *Con tale quota infatti, a parità di pesi, in base alla definizione alternativa, si ottiene il gioco con* $v(\emptyset) = 0; v(1) = 0; v(1,2) = 0; v(2) = 0; v(2,3) = 0; v(1,2,3) = 1; v(1,3) = 0; v(3) = 0$
che è esattamente il gioco di partenza, in cui la quota era pari a 2.

Parlando di quote di maggioranza, come già accennato, non possiamo fare a meno di considerare di parlare del "classico" quorum del 50%. Ci servirà, dato un insieme E finito, avere un simbolo per indicare il numero dei suoi elementi: useremo a tale fine il simbolo $|E|$. Quindi $|N|$ indica il numero complessivo dei giocatori.

Esempio 1.2 (Gioco di maggioranza pesata con quorum del 50%) *Si consideri un gioco* $G = (N, v)$ *in cui*

$$v(S) = \begin{cases} 0 & |S| \leq \frac{|N|}{2} \\ \\ 1 & |S| > \frac{|N|}{2} \end{cases} \tag{3}$$

Evidentemente, nell'ottica di quanto visto sino ad ora, questo gioco potrebbe rappresentare la situazione in cui, in un gruppo di $|N|$ *giocatori, viene fatta passare la decisione presa a maggioranza semplice, e cioè con almeno la metà dei consensi. Ebbene questo gioco* $G = (N, v)$ *altro non è che un gioco a maggioranza pesata* $[\frac{|N|}{2}; \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{|N| \text{ volte}}]$.

Un altro esempio potrebbe essere quello di un collegio elettorale formato dai rappresentanti di stati o regioni i cui rappresentanti siano eletti direttamente dai cittadini dei rispettivi stati o regioni. In ogni collegio elettorale, quindi, gli aventi diritto al voto partecipano ad un altro gioco a maggioranza pesata, con struttura diversa da quello che verrà poi giocato nel Consiglio ma che, se vogliamo, detterà gli elementi per quest'ultimo gioco.
Ancora una volta la teoria ci fornisce gli strumenti per studiare questa sorta di composizione di giochi di maggioranza pesata in un gioco "complessivo".

Definizione 1.3 Siano $M_1, M_2, \ldots, M_n$, n insiemi disgiunti e non vuoti di giocatori. Siano inoltre $(M_1, w_1), (M_2, w_2), \ldots, (M_n, w_n)$, n giochi semplici. Sia $(N, v), |N| = n$ un gioco su N con v funzione caratteristica non negativa. Allora la *v-composizione* di $(M_1, w_1), (M_2, w_2), \ldots, (M_n, w_n)$ denotata da

$$u = v[w_1, w_2, \ldots, w_n] \tag{4}$$

è il gioco con insieme dei giocatori dato da

$$M^* = \bigcup_{j=1}^{n} M_j \tag{5}$$

e funzione caratteristica

$$u(S) = v(\{j \mid w_j(S \cap M_j) = 1\}) \qquad \forall S \subseteq M^* \tag{6}$$

■

Esempio 1.3 (Consiglio di Sicurezza delle Nazioni Unite) .
Il Consiglio di Sicurezza delle Nazioni Unite consiste di cinque stati permanenti, il cui insieme indicheremo con M_1, e dieci altri membri che costituiscono l'insieme M_2.
Le mozioni devono essere approvate da nove membri, tra i quali devono essere inclusi tutti e cinque i membri permanenti.
È facile vedere che siamo in presenza di un gioco $G = (M^*, u)$, con M^* insieme di tutti gli stati membri e in cui

$$u = v[w_1, w_2] \tag{7}$$

dove:

1. *M_1 è l'insieme degli stati permanenti del gioco $G_1 = (M_1, w_1)$ con*

$$\forall S \subseteq M_1, w_1(S) = \begin{cases} 0 & \textit{se } S \neq M_1, \\ \\ 1 & \textit{se } S = M_1, \end{cases} \tag{8}$$

2. M_2 è l'insieme degli altri membri del gioco $G_2 = (M_2, w_2)$ con

$$\forall S \subseteq M_2, w_2(S) = \begin{cases} 0 & se\ |S| \leq 3, \\ \\ 1 & se\ |S| \geq 4, \end{cases} \tag{9}$$

3. v è data da

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = 0$$
$$v(\{1,2\}) = 1. \tag{10}$$

Si noti che sebbene nel gioco $G_2 = (M_2, w_2)$ due coalizioni disgiunte possono risultare vincenti, nel gioco $G_v = (\{1,2\}, v)$ solo la coalizione $\{1,2\}$ è vincente. Ciò non toglie che in base all'equazione 6, le coalizioni vincenti del gioco $G = (M^*, u)$ sono $M_1 \cup \widetilde{S}$, con $\widetilde{S} \subseteq M_2$ e $|\widetilde{S}| \geq 4$.

Esercizio 1.2 *Si descriva il gioco del Consiglio di Sicurezza ONU nei termini di un gioco di maggioranza pesata.*
Suggerim.
Provare ad impostare le condizioni sui pesi e sulla quota di maggioranza che devono essere soddisfatte contemporaneamente per rispecchiare il processo elettorale impiegato al Consiglio dell'ONU. Per esempio il gioco di maggioranza pesata $< \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}, v >$ con la quota e la struttura di pesi definita come
$[38; 7,7,7,7,7,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]$ *rispecchia tale meccanismo?*
Se sì, è l'unica che lo rispecchia? ∎

I giochi di maggioranza pesata sono giochi semplici. D'altra parte non è vero che ogni gioco semplice sia un gioco di maggioranza pesata, come mostra l'esempio seguente:

Esempio 1.4 *Si consideri una ipotetica commissione parlamentare formata da tre senatori $\{x, y, z\}$ e tre deputati $\{a, b, c\}$. Se per l'approvazione di una certa mozione occorre il consenso di almeno due senatori e di almeno due deputati, non c'è modo di trovare una struttura di pesi per ciascun giocatore e una quota in grado di rappresentare il suddetto gioco. Infatti devono essere* *soddisfatte contemporaneamente*

$$\begin{cases} p_x + p_y + p_a + p_b > q \\ p_x + p_z + p_a + p_c > q \\ p_z + p_y + p_c + p_b > q \\ p_x + p_z + p_y + p_a \leq q \\ p_x + p_z + p_y + p_b \leq q \\ p_x + p_z + p_y + p_c \leq q \\ p_a + p_b + p_c + p_x \leq q \\ p_a + p_b + p_c + p_y \leq q \\ p_a + p_b + p_c + p_z \leq q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2p_x + 2p_y + 2p_z + 2p_a + 2p_b + 2p_c > 3q \\ 4p_x + 4p_y + 4p_z + 4p_a + 4p_b + 4p_c \leq 6q \end{cases} \tag{11}$$

che è evidentemente impossibile da soddisfare.

2 Indici di Potere

Come osservato nel capitolo relativo ai giochi semplici, un punto fondamentale dell'analisi condotta con gli strumenti della teoria dei giochi cooperativi è quello di indicare dei criteri su come spartire il potere all'interno delle coalizioni vincenti. Vogliamo andare avanti in questa direzione e cercare allocazioni che rispettino altri e/o ulteriori principi. Ed è proprio a questo che servono *gli indici di potere*: un indice di potere è una funzione Ψ che associa ad ogni gioco semplice $< N, v >$ un vettore $\Psi(v) = (\Psi_1(v), \ldots, \Psi_n(v))$ la cui i -esima componente è interpretata come una misura della influenza che il giocatore i può esercitare sull'esito.
Il significato degli indici di potere, quindi, non è l'indicazione di una spartizione del guadagno ottenuto dalla coalizione, ma una misura del potere dei singoli giocatori.
Questa differenza è sostanziale e determina tutta una serie di considerazioni sugli assiomi che caratterizzano di volta in volta i diversi indici di potere. Tali considerazioni sono utili, a nostro avviso, ad evidenziare quali siano i ragionamenti che stanno alla base della scelta degli assiomi.
Per esempio, parlando di imputazioni, si era introdotta la condizione

$$\sum_{i=1}^{n} \Psi_i(v) = v(N) \tag{12}$$

come espressione di efficienza. Ebbene, questa stessa condizione la ritroveremo anche tra gli assiomi che caratterizzeranno alcuni degli indici di potere che analizzeremo.
La proprietà di efficienza può essere sensata in relazione a indici di potere di giochi in cui è verosimile che si formi la grande coalizione. Sarebbe infatti difficile sostenere una misura di potere dei giocatori vincolata al valore ottenuto dalla grande coalizione qualora ci si sapetti che, data la struttura

del gioco, questa non si formerà. Abbiamo osservato nel capitolo sui giochi semplici come per i giochi superadditivi sia plausibile che tutti i giocatori si coalizzino insieme. Potrebbe quindi sembrare ragionevole restringere il campo di analisi a quei giochi che sono superadditivi, almeno quando si richieda che sia soddisfatta la condizione di efficienza. Tuttavia, come vedremo nel seguito, l'efficienza non è una proprietà di cui non si possa fare a meno. Inoltre, in alcuni casi, anche in giochi non superadditivi potrebbe essere ragionevole ritenere che i giocatori formino la grande coalizione (si provi ad immaginarne alcuni). Date queste premesse, in aggiunta alla generalità dei risultati che mostreremo e per coerenza con quanto scritto nel capitolo sui giochi semplici in cui non facevamo alcuna ipotesi a priori di superadditività, lasciamo al lettore la considerazione di ritenere ragionevole o meno che in un gioco la grande coalizione si formi oppure no.

Richiederemo cioè che, per ogni gioco cooperativo ad utilità trasferibile, sia verificata la condizione (12). Se $v(n)$ può essere interpretata come una torta da distribuire tra i giocatori, questa condizione è davvero naturale (si vedano le considerazioni sulla fattibilità e sull'efficienza).

Ma se il contesto in cui ci si muove è quello dei giochi semplici interpretati come processi di scelta decisionale (come quelli considerati nel capitolo sui giochi semplici) non c'è nessuna torta di taglia pari a 1 da dividere. Il fatto che $v(N) = 1$ significa soltanto che N, la coalizione formata da tutti i giocatori, può far sì che passi una certa decisione, come qualsiasi altra coalizione vincente può fare.

Quindi una giustificazione della efficienza sulla base dei criteri illustrati a proposito del nucleo, in questo contesto non ha senso: il punto è misurare il potere, non distribuirlo.

Richiedere che la somma delle componenti di un indice di potere sia uguale a 1 non può nemmeno essere considerato come una semplice normalizzazione. Naturalmente è una normalizzazione per un dato gioco. In questo caso richiedere che questa somma sia uguale ad uno (o a cento se uno preferisce parlare in termini di percentuale) è innocuo nei limiti di comparazioni coinvolgenti giocatori all'interno del dato gioco.

Solitamente, però, gli indici di potere sono utilizzati per comparare giochi differenti e sono assiomaticamente fondati su assunzioni che coinvolgono il potere in giochi differenti. Da questo discende immediatamente la necessità che la somma delle componenti dell'indice di potere sia identico in tutti i giochi appartenenti a classi di giochi su differenti insiemi di giocatori $\mathcal{C}^N \subseteq \mathcal{G}^N$ e $\mathcal{C}^M \subseteq \mathcal{G}^M$, dove $\mathcal{G}^N$ e $\mathcal{G}^M$ sono gli insiemi dei giochi cooperativi ad utilità trasferibile aventi rispettivamente come insieme dei giocatori N ed M. In formula (posto $n = |N|$ e $m = |M|$)

$$\sum_{i=1}^{n} \Psi_i(v) = \sum_{i=1}^{m} \Psi_i(w) \quad \forall < N, v > \in \mathcal{C}^N, \forall < M, w > \in \mathcal{C}^M. \qquad (13)$$

Ed è proprio questo ciò che la condizione di efficienza fa. Si noti che la condizione di efficienza soddisfa l'uguaglianza nella (13) per tutti i giochi $< N, v >, < M, w >$ qualunque sia il numero dei giocatori in N e in M. Quindi indicare la condizione di efficienza come "normalizzazione" non sarebbe corretto: l'idea di normalizzazione non si adatta alla interpretazione che è stata fatta, e ancora di meno alla sua giustificazione.
Questa non è l'unica giustificazione della condizione di efficienza. Ne esiste almeno un'altra che è legata ad una differente interpretazione degli indici di potere.
Gli indici di potere possono essere interpretati come misure o valutazioni a priori della probabilità di giocare un "ruolo rilevante" in un processo collettivo di scelta decisionale che segue un dato insieme di regole.
In questo contesto, si consideri una data coalizione S vincente in un gioco semplice $< N, v >$: il giocatore i in S è considerato giocare un ruolo rilevante se il suo voto è necessario per far passare il suo esito preferito il che significa che i è in grado con il proprio ritiro da S, di far diventare perdente la coalizione $S \setminus \{i\}$.
Data quindi una distribuzione di probabilità $p_i(S)$ che denota la probabilità della coalizione $S \subseteq N$ di formarsi riconoscendo al giocatore i il ruolo rilevante, un indice di potere potrebbe essere dato così :

$$\Psi_i(v) = \sum_{S \subseteq N, S \ni i} p_i(S)(v(S) - v(S \setminus \{i\})) \tag{14}$$

Da questa base comune, lo vedremo dopo, differenti indici di potere emergono da differenti modelli probabilistici sulla formazione delle coalizioni.
È quindi ovvia la risposta al quesito su quale sia il significato della condizione di efficienza quando gli indici di potere sono interpretati come probabilità di giocare un ruolo rilevante: il fatto stesso di essere una distribuzione di probabilità e, pertanto, di rispettare la condizione che la somma delle probabilità deve dare 1.
Tutte queste osservazioni erano volte ad evidenziare che tipo di considerazioni vengono fatte per giustificare la ragionevolezza degli assiomi che caratterizzano gli indici di potere.Vediamo ora qualcuno di questi indici con la relativa caratterizzazione assiomatica.

3 L'indice di Shapley

Un particolare indice di potere (appartenente alla classe di indici che possono essere definiti a partire dalla relazione (14), come vedremo tra poco) è il *valore Shapley* o, indifferentemente, *indice di Shapley-Shubik.*

La formula per calcolare il valore Shapley vista nella lezione sui TU-game ha una interpretazione probabilistica. Supponiamo che i giocatori entrino uno dopo l'altro in una stanza, seguendo l'ordine dato dalla permutazione

σ. Ad ogni giocatore, entrando nella stanza, viene dato il suo contributo marginale alla coalizione che già si trovava nella stanza. Non c'è ragione di privilegiare una permutazione rispetto ad un'altra. E quindi calcoliamo il valor medio di questi contributi marginali. Da qui la formula (ricordo che $n!$ è il numero di permutazioni su un insieme di n elementi).

Esempio 3.1 *Si consideri una Società con tre azionisti,* $N = \{1, 2, 3\}$*, che si dividono l'intero stock azionario nelle percentuali del* $20, 30$ *e* 50 *per cento rispettivamente.*
Si assuma che ogni decisione possa essere approvata dal consiglio degli azionisti solo se in possesso della maggioranza semplice (quorum del 50% *più uno) delle quote azionarie.*
Questo gioco può essere trattato come un gioco semplice di maggioranza pesata a tre giocatori nel quale le coalizioni vincenti sono:
$\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$.
Possiamo calcolare il valore Shapley di questo gioco costruendo la tabella seguente, dove nella prima colonna mettiamo le varie permutazioni possibili dei tre giocatori, mentre nella colonna "intestata" con $i = 1, 2, 3$ *mettiamo i guadagni marginali attribuiti al giocatore i nele varie permutazioni possibili. Le due ultime righe contengono le somme dei guadagni marginali e poi tali valori divisi per* 6 *(ovverossia* $3!$*), vale a dire il valore Shapley.*

permutazione	1	2	3
123	0	0	1
132	0	0	1
213	0	0	1
231	0	0	1
312	1	0	0
321	0	1	0
totale	1	1	4
valore Shapley	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$

La formula utilizzata può naturalmente essere utile per calcolare il valore Shapley, però ha il difetto di richiedere una quantità di calcoli enorme, se il numero totale dei giocatori è grande. Si noti che ad esempio è $10! = 3.628.800$ e quindi se abbiamo un gioco con 10 giocatori questo e' il numero di addendi della somma che dobbiamo calcolare applicando la formula.

In realtà, quando entra nella stanza, al giocatore i non interessa sapere in che ordine sono entrati gli $s-1$ giocatori già presenti ($s = |S|$) nè in che ordine entreranno gli $n-s$ giocatori assenti. Quindi il valore $(v(S)-v(S\setminus\{i\})$ si presenta nella sommatoria $(s-1)!(n-s)!$ volte

$$\Psi_i(v) = \sum_{S \subseteq N, S \ni i} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} (v(S) - v(S \setminus \{i\})) \tag{15}$$

Poichè le coalizioni che non contengono i sono 2^{n-1}, questa sommatoria contiene soltanto 2^{n-1} (512 se $n = 10$), il che semplifica notevolmente il calcolo.
Questo significa anche porre nella (14) $p_i(S) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$.

Se il gioco è semplice, $v(S) - V(S \setminus \{i\}) = 1$ quando la coalizione S è vincente e la coalizione $S \setminus \{i\}$ è perdente, altrimenti il contributo marginale è uguale a zero. Perciò la formula (15) diventa:

$$\Psi_i(v) = \sum_{S \in A_i} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \tag{16}$$

dove A_i denota l'insieme di tutte le coalizioni vincenti S che contengono il giocatore i e tali che $S \setminus \{i\}$ siano perdenti. Questa formulazone per la classe dei giochi semplici viene generalmente indicata con il nome di indice di Shapley - Shubik, dal nome dei due autori che la introdussero nel 1954.

Si dimostra che il vettore Shapley è un imputazione del gioco. Non sempre invece sta nel nucleo.

Esercizio 3.1 *Calcolare il valore Shapley per l'esempio precedente utilizzando la formulazione di Shapley - Shubik.*

4 L'indice di Banzhaf

L'indice di Banzhaf è un altro indice di potere basato sui contributi marginali come quello di Shapley.
Questa volta però, tutte le coalizioni alle quali appartiene il giocatore i sono considerate equiprobabili. Quindi nella (14), essendo il numero di coalizioni possibili a cui i appartiene pari a 2^{n-1} (cioè tutte quelle coalizioni ottenute dalle coalizioni prive di i, che sono 2^{n-1} appunto, con l'aggiunta di i), basta sostituire $p_i(S) = \frac{1}{2^{n-1}}$. L'indice di Banzhaf corrisponde infatti a:

$$\beta_i(v) = \sum_{S \subseteq N, S \ni i} \frac{1}{2^{n-1}} (v(S) - v(S \setminus \{i\})) \tag{17}$$

Esempio 4.1 *Proviamo a calcolare l'indice di Banzhaf del gioco nell'esempio 3.1 utilizzando la formula (17). Per questo motivo costruiamo la tabella seguente, dove nella prima colonna mettiamo le varie coalizioni possibili dei tre giocatori, mentre nella colonna "intestata" con $i = 1, 2, 3$ mettiamo i guadagni marginali attribuiti al giocatore i nele varie coalizioni possibili. Ovviamente quando un giocatore non appartiene alla coalizione, nella casella di incrocio metteremo *, che sta a significare che il termine non va considerato, come da definizione della sommatoria in (17). Le due ultime righe contengono le somme dei guadagni marginali e poi tali valori divisi per* 4 *(ovverossia $2^{3-1)}$), vale a dire l'indice di Banzhaf.*

coalizione	1	2	3
$\{\emptyset\}$	$*$	$*$	$*$
$\{1\}$	0	$*$	$*$
$\{2\}$	$*$	0	$*$
$\{3\}$	$*$	$*$	0
$\{1,2\}$	0	0	$*$
$\{1,3\}$	1	$*$	1
$\{2,3\}$	$*$	1	1
$\{1,2,3\}$	0	0	1
totale	1	1	4
Indice Banzhaf	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Tale vettore è evidentemente diverso dal vettore di Shapley.
Non solo: la somma delle componenti del vettore di Banzhaf è diversa da 1.

Esercizio 4.1 *Si consideri il gioco a quattro giocatori* $< \{1,2,3,4\}, v >$ *tale che* $v(N) = 1$ *e* $v(S) = 0 \quad \forall S \subset N$*. Calcolarne l'indice di Shapley e quello di Banzhaf.*
*(*Sol. *Shapley:* $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$*; Banzhaf:* $(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$ *)*

Il fatto che la somma delle componenti del vettore di Banzhaf sia diversa da 1 è una proprietà di tale vettore, o meglio una mancanza del requisito di soddisfare l'assioma di efficienza.
Chi volesse tentare di normalizzare il vettore, magari per cercare di confrontarlo meglio con il vettore Shapley, è libero di farlo: anzi, l'indice di Banzhaf *normalizzato* (detto anche indice di Banzhaf-Coleman) è un ulteriore indice di potere.

5 Elezione del Presidente degli Stati Uniti

Nel paragrafo precedente abbiamo esaminato il problema di garantire la corretta rappresentatività degli elettori, problema che traeva origine dalla naturale indivisibilità dei rappresentanti.
Ora presenteremo un problema sempre di rappresentatività degli elettori che però sta a monte del precedente ed è direttamente collegato ai meccanismi ed alle regole di votazione utilizzate.
Il metodo attualmente utilizzato per scegliere il presidente degli Stati Uniti d'America è costituito da due fasi: nella prima gli elettori di ogni singolo Stato eleggono a maggioranza i cosiddetti "Grandi Elettori" o membri del Collegio Elettorale che, nella fase successiva, voteranno a loro volta per il Presidente. Ogni Stato ha a disposizione un numero di Grandi Elettori definito dalla quota di rappresentatività (e dai meccanismi di arrotondamento utilizzati). Generalmente si assume (sebbene nella pratica possano esserci eccezioni occasionali a questa regola) che tutti i Grandi Elettori di un dato

Stato voteranno per il candidato alla Presidenza preferito dalla maggioranza dello Stato nel quale sono stati eletti.
Dato questo meccanismo, per un candidato alla Presidenza una vittoria di misura in uno Stato grande (cioè con un elevato numero di Grandi Elettori) potrebbe essere migliore di tante vittorie schiaccianti in altrettanti piccoli Stati (per esempio, se supponiamo che ad ogni milione di consensi corrisponda un Grande Elettore, conviene avere due milioni più uno consensi in uno stato in cui il totale della popolazione votante è quattro milioni piuttosto che tre milioni di consensi su tre Stati diversi ciascuno con un milione di popolazione votante). In altre parole, con un tale meccanismo, possono risultare vincenti coalizioni con meno della metà dei consensi popolari.
Possiamo modellizzare questo meccanismo elettorale come la v-composizione (si veda in proposito il capitolo sui giochi semplici)

$$u = v[w_1, w_2, \dots, w_{51}],$$

dove $< A, u >$ è il gioco dell'elezione del Presidente degli Stati Uniti (cioè il gioco tra tutti gli appartenenti all'insieme degli aventi diritto al voto negli Stati Uniti, che costituiscono l'insieme A), $< G, v >$ è il gioco nel Collegio Elettorale (cioè il gioco delle elezioni tra i Grandi Elettori, che costituiscono l'insieme G) e $< N_1, w_1 >, < N_2, w_2 >, \dots, < N_{51}, w_{51} >$ sono i giochi nei singoli Sati, cioè $< N_j, w_j >$, $j = 1, 2, \dots, 51$, è il gioco giocato tra gli elettori nel j-esimo Stato (cioè dagli elettori che costituiscono l'insieme N_J).
Per un dato Stato j, $j = 1, 2, \dots, 51$, $< N_j, w_j >$ è un gioco di maggioranza semplice tra $n_j = |N_j|$ giocatori. Questo significa che, come abbiamo visto nel capitolo sui giochi semplici, la funzione caratteristica di tale gioco sarà definita come segue:

$$w_j(S) = \begin{cases} 0 & |S| \leq \frac{n_j}{2} \\ \\ 1 & |S| > \frac{n_j}{2} \end{cases} \tag{18}$$

Assumendo, come abbiamo fatto, che tutti i Grandi Elettori di un dato Stato votino nella stessa maniera, $< G, v >$ risulta invece essere un gioco di maggioranza pesata a 51 giocatori definito dalla struttura di pesi e quota $[270; p_1, p_2, \dots, p_{51}]$, dove il peso p_j, $j = 1, 2, \dots, 51$, è il numero di Grandi Elettori provenienti dal j-esimo Stato. Nel 1977, l'anno al quale Owen ha riferito nel suo libro l'esempio che stiamo trattando, tali pesi variavano tra i 45 della California ai 3 degli Stati più piccoli e del Distretto della Columbia. Oggi i pesi sono leggermente diversi da quelli del 1977, ma la struttura del gioco è indicativamente la stessa.
Ed è proprio questa struttura che Owen cercò di analizzare tramite il calcolo degli indici di potere (sia di Shapley che di Banzhaf) dei giocatori del gioco $< A, u >$. Ciò che infatti non è per niente ovvio è riuscire a capire se il gioco $< G, v >$ non favorisce alcuni elettori degli Stati Uniti nei confronti di altri o, in altri termini, se il potere di ciascun cittadino avente diritto al voto è lo

stesso a prescindere dallo Stato di appartenenza (ancora una volta vogliamo vedere se è rispettato il principio "*one man one vote*").
Calcolare gli indici di Sahpley e di Banzhaf per il gioco di maggioranza $< G, v >$, dato l'elevato numero di giocatori, non è banale e anche con il calcolatore, senza fare le debite semplificazioni, può risultare un problema irrisolvibile. Owen, nel suo libro, mostra un metodo per giungere ad una stima approssimata di tali indici e li confronta con i risultati veri, la cui computazione, però, non è mostrata. Nella seguente tabella riportiamo uno stralcio a nostro avviso significativo della tabella in cui Owen mostra i valori Shapley e Banzhaf da lui calcolati per gli aventi diritto al voto nei vari Stati dell'Unione:

Stato	Votanti	Numero di grandi elettori	Indice Shapley ($\Phi \times 10^{-9}$)	Indice Banzhaf ($\Psi \times 10^{-5}$)
California	19953134	45	7.8476	8.6624
Distretto della Columbia	765510	3	2.4783	2.7616
Florida	6789433	17	4.7326	5.2716
Montana	694409	4	3.4516	3.8407

Si noti già da questi pochi dati di che entità siano le discrepanze tra il potere degli aventi diritto al voto, indicate sia dal valore Shapley che dall'indice Banzhaf. Entrambi gli indici mostrano come il potere di un cittadino elettore in California sia approssimativamente il triplo del potere di un cittadino elettore nel Distretto della Columbia. Anche per gli elettori della Florida, Stato molto problematico per la proclamazione del Presidente nell'elezione del 2000, la situazione è nettamente favorevole rispetto agli Stati più piccoli. Altra situazione caratteristica è il rapporto tra gli indici di due Stati (o più precisamente dell'unico Distretto e di uno Stato), entrambi tra i più piccoli: il Distretto della Columbia e lo Stato del Montana. Pur avendo un solo Grande Elettore di differenza (a questo proposito si noti il numero di Grandi Elettori per il Montana, che ha meno elettori del Distretto della Columbia ma nonostante ciò possiede un Grande Elettore in più dal momento che la distribuzione dei Grandi Elettori è calcolata sulle quote di rappresentatività, cioè sulla popolazione residente), il potere dei cittadini aventi diritto al voto in Montana è quasi una volta e mezzo quello dei cittadini aventi diritto al voto nel Distretto della Columbia.