Esercizi TdG per PoliMI

Esercizio 1 Trovare gli equilibri di Nash (in strategie pure) dei giochi seguenti.

I \ II	L	R
T	$100, 100$	$1, 1$
B	$1, 1$	$100, 100$

I \ II	L	R
T	$99, 99$	$0, 0$
B	$0, 0$	$98, 98$

Quale pensate venga effettivamente giocato? Commentare.

Esercizio 2 Nell'esercizio precedente, si può essere indotti a ritenere che una diminuzione dei payoff possa portare addirittura ad un esito migliore per i giocatori.

D'altro canto, le funzioni di utilità di von Neumann-Morgenstern sono definite a meno di trasformazioni lineari strettamente crescenti. Ciò potrebbe indurre a ritenere che l'affermazione precedente non sia significativa. E' una obiezione fondata o no? Occorre fare qualche ulteriore precisazione?

Esercizio 3 Trovare gli equilibri di Nash sia in pure che in miste per seguente gioco (Dilemma del Prigioniero), in cui: $a < b < c < d$.

I \ II	L	R
T	c, c	a, d
B	d, a	b, b

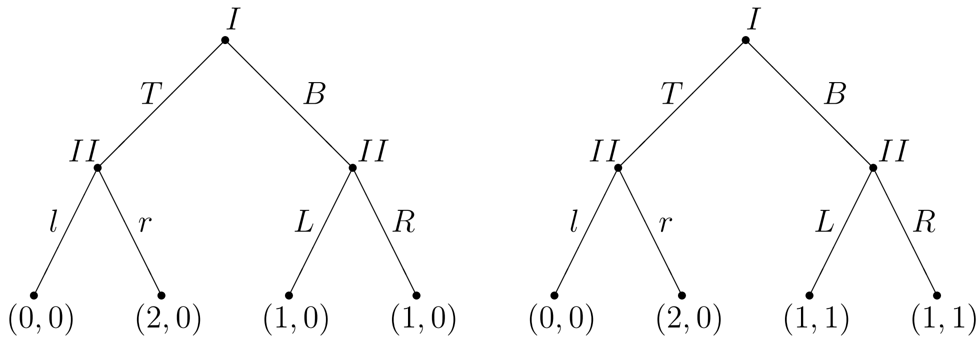
Esercizio 4 Trovare gli equilibri di Nash per l'estensione mista del gioco:

$I \backslash II$	L	C	R
T	$(3, 2)$	$(5, 4)$	$(7, 8)$
B	$(5, 9)$	$(1, 11)$	$(4, 3)$

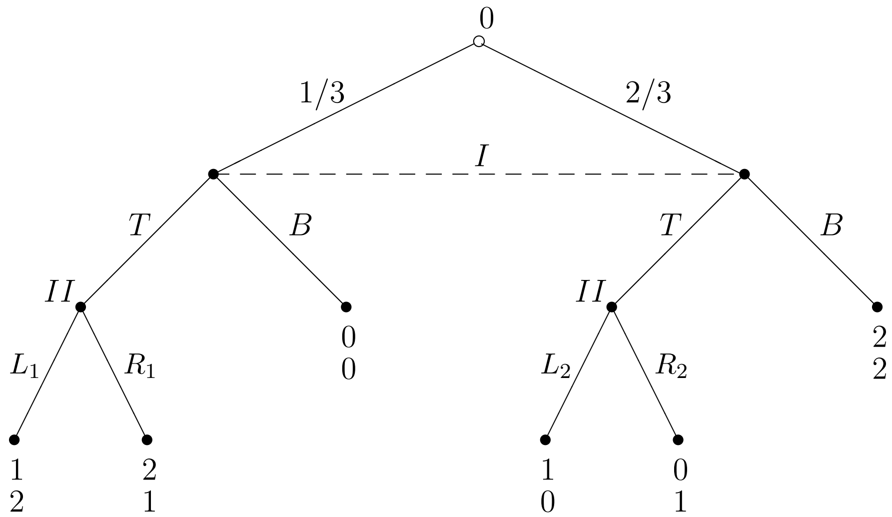
Esercizio 5 Si consideri un gioco a due sole "mosse" e ad informazione perfetta. Individuare condizioni che garantiscano l'*unicità* del SPE.

Esercizio 6 Descrivere una strategia del gioco del "tris", per il primo giocatore.

Esercizio 7 Determinare gli SPE per entrambi i giochi in figura. Commentare.

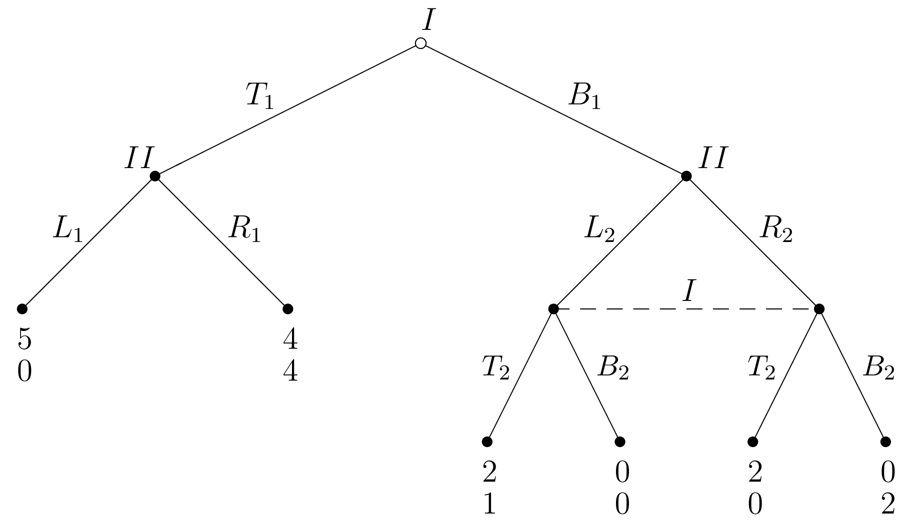


Esercizio 8 Si consideri il seguente gioco in forma estesa:



a) scriverne la forma strategica;
b) determinarne gli equilibri di Nash in strategie pure;
c) esistono strategie dominate?

Esercizio 9 Si consideri il seguente gioco in forma estesa:



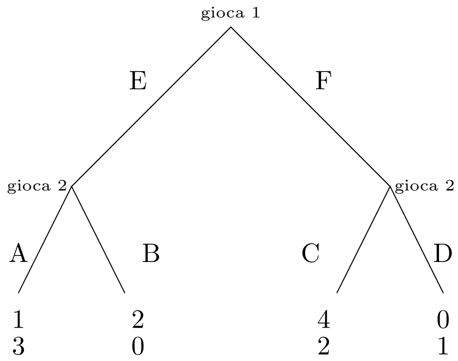
a) scriverne la forma strategica;
b) determinarne gli equilibri di Nash in strategie pure (se esistono);
c) trovarne gli equilibri perfetti nei sottogiochi (se esistono)

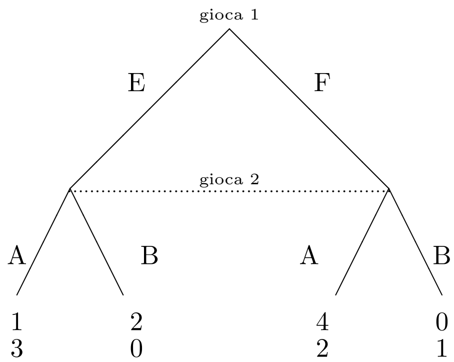
Esercizio 10 Determinare gli eventuali equilibri di Nash in strategie pure del seguente gioco in forma strategica:

$I\backslash II$	L	C	R
T	$0,1$	$-1,3$	$1,3$
M	$0,2$	$1,1$	$2,0$
B	$1,0$	$1,-1$	$3,0$

Esistono strategie debolmente dominate? E strategie fortemente dominate?

Esercizio 11 Si considerino i seguenti due giochi in forma estesa:



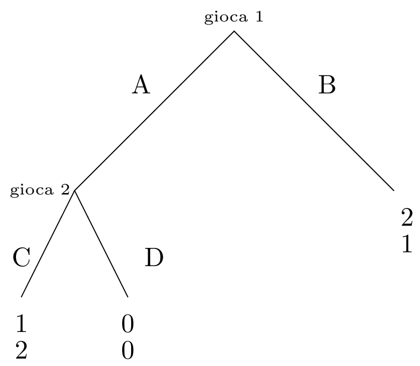


Scrivere la forma strategica di entrambi (uno è a informazione perfetta, mentre l'altro non lo è).

Calcolare gli equilibri di Nash in strategie pure e gli equilibri perfetti nei sottogiochi di quello dei due che è a informazione perfetta.

Calcolare gli equilibri di Nash in strategie miste di quello non a informazione perfetta.

Esercizio 12 Dato il seguente gioco in forma estesa, descriverlo in forma strategica:



Calcolarne poi gli equilibri di Nash in strategie pure.

Esercizio 13 Calcolare gli equilibri di Nash in strategie miste del seguente gioco:

I/II	t_1	t_2
s_1	1,2	2,1
s_2	3,1	1,3

Esercizio 14 Calcolare l'equilibrio di Nash in strategie completamente miste del seguente gioco (di Aumann) in forma strategica:

$I \backslash II$	L	R
T	$(6,6)$	$(2,7)$
B	$(7,2)$	$(0,0)$

Esercizio 15 Diciamo che un gioco (a due giocatori) $G = (X, Y, f, g)$ è *simmetrico* se $X = Y$ e $f(x, y) = g(y, x)$ per ogni $x, y \in X$.
a) Si provi che, in un gioco simmetrico, se $(\bar{x}, \bar{y})$ è un equilibrio di Nash, allora $(\bar{y}, \bar{x})$ è anch'esso un equilibrio.
b) E' vero che in un gioco simmetrico tutti gli equilibri sono del tipo $(\bar{x}, \bar{x})$?
c) E' vero che in un gioco simmetrico c'è sempre un equilibrio del tipo $(\bar{x}, \bar{x})$?
d) I giochi classici come il "dilemma del prigioniero" e la "battaglia dei sessi" sono descritti da me con una tabella nella quale le strategie per I sono T, B e per II sono invece L, R. In altre parole, non abbiamo che $X = Y$. Tuttavia, sembra ragionevole considerare simmetrici anche questi giochi. Riconsiderare la definizione data ed adattarla convenientemente in modo da "coprire" anche questi casi. E' il caso di criticare la definizione data?

Esercizio 16 Due giocatori devono scegliere, a turno, una lettera fra $\{A, B, C\}$. Sono ammesse ripetizioni. Ognuno dei due giocatori ha due turni a disposizione.

Si commenti la seguente affermazione:

> Ogni "storia" del gioco è identificata da una sequenza di 4 caratteri scelti tra A, B, C. Ad esempio, le seguenti sequenze identificano differenti storie: $AAAA$, $ABCA$, $CBAA$, etc. Pertanto, le strategie a disposizione dei due giocatori sono date da tutte le sequenze di questo tipo e quindi sono 3^4.

SOLUZIONI

Esercizio 1 Soluzione

Gli equilibri di Nash sono (T, L) e (B, R) per entrambi i giochi. I commenti a voi!

Esercizio 2 Soluzione

Che una diminuzione dei payoff possa portare a un esito (di *equilibrio*) migliore per i giocatori è mostrato dall'esercizio menzionato nel testo.

L'obiezione chiede di precisare il *valore interpretativo* di questa osservazione. Se siamo di fronte a due situazioni diverse di gioco, l'osservazione fatta sulle trasformazioni lineari dei payoff può essere pertinente. Se invece i payoff scaturiscono dalla *stessa* funzione di utilità che viene applicata ad esiti diversi, come accade nell'esempio (di game form) qui illustrato:

I \ II	L	R
T	a	b
B	c	d

I \ II	L	R
T	e	f
B	g	g

in cui i nostri decisori preferiscono l'esito a ad e, così come d ad e, etc., allora possiamo effettivamente affermare che l'esito prevedibile della situazione di sinistra è preferito all'esito prevedibile che si ha nella situazione di destra.

Esercizio 3 Soluzione

L'unico equilibrio di Nash in strategie pure è (B, R).

Vediamo le strategie miste. Se I gioca la strategia mista $(p, 1-p)$ e II gioca $(q, 1-q)$, il payoff atteso per I è:

$$cpq + ap(1-q) + d(1-p)q + b(1-p)(1-q) =$$

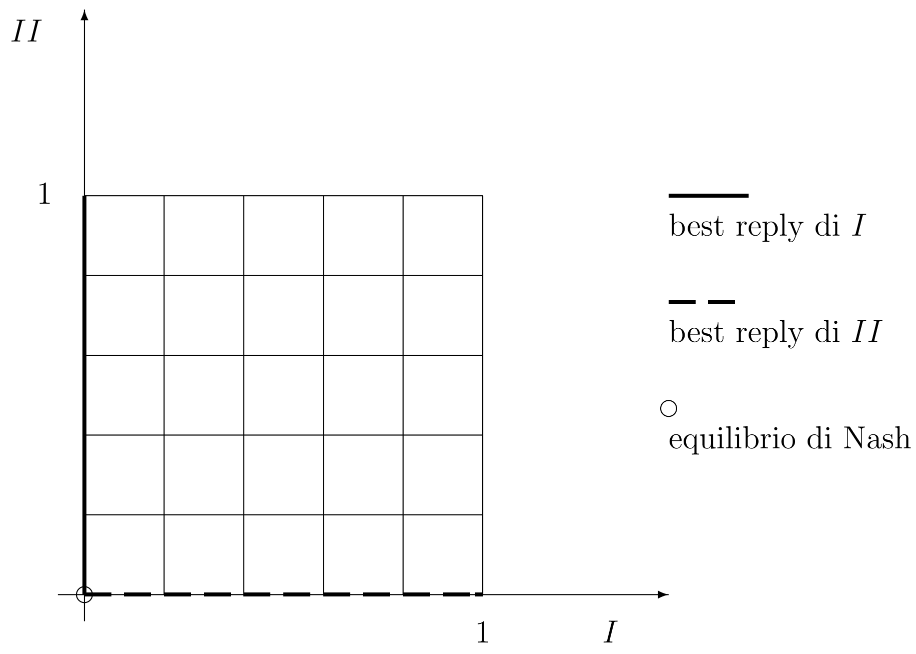
$$= [(c-d)q + (a-b)(1-q)]p + (d-b)q + b$$

Per ipotesi $c - d < 0$ e $a - b < 0$, quindi $(c-d)q < 0$ tranne che per $q = 0$, però in tal caso $(a-b)(1-q) < 0$, pertanto $(c-d)q + (a-b)(1-q) < 0$ qualunque sia q.

Pertanto il payoff per I è massimo (qualunque sia q) per $p = 0$. Quindi la "best reply" per I è sempre $p = 0$ per ogni q.

Discorso del tutto simmetrico vale per II, per il quale la "best reply" è $q = 0$ per ogni $p \in [0, 1]$.

Possiamo anche disegnare il grafico delle "best reply":



Quindi, l'estensione mista del dilemma del prigioniero ha un unico equilibrio di Nash che corrisponde all'unico equilibrio in strategie pure del gioco dato.

D'altronde, questi risultati erano ampiamente scontati: dato che la strategia T è fortemente dominata, qualunque strategia mista che sia "best reply" assegna sempre probabilità 0 a T. Per i dettagli, si può consultare la soluzione dell'esercizio seguente.

Esercizio 4 Soluzione

Osserviamo preliminarmente che la strategia L è fortemente dominata da C. Ne segue che ogni strategia mista di II che sia miglior risposta a una qualunque strategia di I assegna sempre probabilità 0 ad L (se per assurdo fosse assegnata ad L una probabilità positiva, converrebbe "trasferire" tale probabilità dalla strategia L alla strategia C, ottenendo un payoff atteso di II strettamente maggiore, in contraddizione con l'assunto che fosse una "miglior risposta").

Ci si può quindi restringere, nella ricerca di equilibri, alle strategie miste del tipo $(0, q, 1-q)$ per II (con ovvio significato dei simboli, si spera!).

Il payoff atteso per I da $(p, 1-p)$ e $(0, q, 1-q)$ è:

$$5pq + 7p(1-q) + 1(1-p)q + 4(1-p)(1-q) =$$

$$= (q+3)p + (4-3q)$$

Poiché il coefficiente di p è maggiore di 0, la "best reply" per I è sempre $p = 1$. Cosa che non dovrebbe sorprendere, visto che "eliminata" la strategie L la strategia B di I diventa fortemente dominata ...

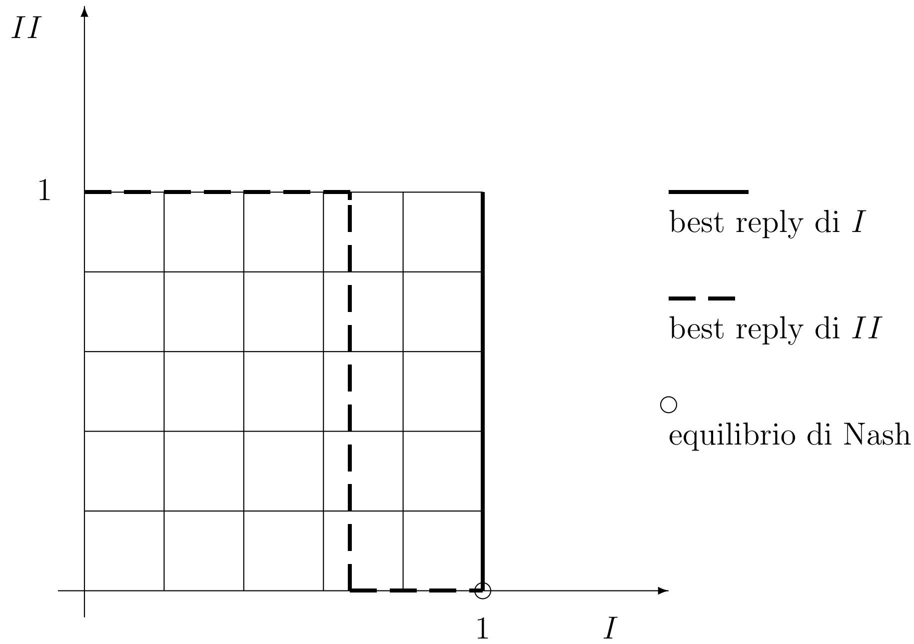
Per quanto riguarda II, il suo payoff atteso e:

$$4pq + 8p(1 - q) + 11(1 - p)q + 3(1 - p)(1 - q) =$$

$$= (-12p + 8)q + (5p + 3)$$

E, allora, se $p < 2/3$ la "best reply" per II è $q = 1$, per $p > 2/3$ è $q = 0$, ed infine per $p = 2/3$ è tutto l'intervallo $[0, 1]$.

Disegniamo i grafici delle migliori risposte per trovare gli equilibri di Nash:



Come era prevedibile, troviamo un solo equilibrio di Nash (che è, di fatto, in strategie pure): dopotutto la coppia (T, R) è l'unica che sopravvive all'eliminazione iterata di strategie fortemente dominate.

Esercizio 5 Soluzione

Una condizione sufficiente è che i payoff di II siano tutti distinti tra loro e così i payoff di I. In questo modo siamo certi che quando II sceglie, ad ogni nodo, la sua "mossa" migliore, questa è univocamente determinata. Per lo stesso motivo, anche la scelta di I sarà univoca.

Esercizio 6 Soluzione

Vediamo una descrizione parziale. Intanto, una codifica per le caselle del "tris":

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Allora, *una* strategia per il giocatore I (cioè per il giocatore che comincia il gioco) è:

- primo turno per I

  mette la croce su 1

- secondo turno per I

  se II ha messo il tondo su una delle caselle da 3 a 9, allora I mette la croce su 2

  se II ha messo il tondo sulla casella 2, I mette la croce su 3

- terzo turno per I

  se II ha messo il tondo su una delle caselle da 5 a 9, allora I mette la croce su 3 (se non l'aveva messa su 3 già II o I stesso; in tal caso I la mette su 4)

  se II ha messo il tondo sulla casella 4, I mette la croce su 3 (se non l'aveva messa su 3 già II o I stesso; in tal caso I la mette su 4)

  se II ha messo il tondo sulla casella 3, I mette la croce su 4 (se non l'aveva messa su 3 già II o I stesso; in tal caso I la mette su 4)

- e così via ...

In realtà stiamo scrivendo un "libretto di istruzioni" che vuole descrivere una strategia molto semplice da spiegare: il giocatore I mette ad ogni suo turno la sua crocetta sulla casella libera contraddistinta dal numero (nella numerazione che abbiamo dato) più basso.

L'abbozzo di descrizione minuziosa precedente può indurre a immaginare che una descrizione esaustiva sia molto complicata (se lo è già così, volendo descrivere una strategia molto semplice, figuriamoci la descrizione di una strategia più "contorta").

Forse vale anche la pena di "contare" quante sono le strategie a disposizione di I: sono

$$9 \cdot 7^{9 \cdot 8} \cdot 5^{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} \cdot 3^{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} \cdot 1^{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 9 \cdot 7^{72} \cdot 5^{3024} \cdot 3^{60480} \approx$$

$$\approx 9 \cdot 7,03 \cdot 10^{60} \cdot 4,84 \cdot 10^{2113} \cdot 1,96 \cdot 10^{28856} \cdot \approx 6,02 \cdot 10^{31031}$$

Questo numero è molto più grande di quanto di solito uno immagina prima di fare i calcoli espliciti. Va detto che il calcolo fatto presuppone che il gioco finisca solo quando sono state riempite tutte le nove caselle. Se si ritiene che il gioco finisca non appena uno dei giocatori ha fatto un tris, allora il numero si riduce ma resta comunque molto, molto alto. Come mai allora il tris viene considerato, ed a ragione, un gioco poco interessante? Perché, nonostante questo numero così grande di strategie, l'analisi del gioco viene molto semplificata se si tiene conto delle simmetrie del gioco e, soprattutto, se si è interessati a trovare solo una strategia vincente o quanto meno ottimale: in tal caso, molte alternative sono ovviamente da scartare.

Esercizio 7 Soluzione

Il gioco a sinistra ha i seguenti SPE: (B, lL), (B, lR), (T, rL), (T, rR). Anche per quello di destra gli SPE sono (B, lL), (B, lR), (T, rL), (T, rR). I commenti a voi.

Esercizio 8 Soluzione

Le strategie a disposizione di I sono T e B. Quelle per II sono L_1L_2, L_1R_2, R_1L_2, R_1R_2.

Se I sceglie B, il payoff atteso (per qualunque strategia di II) è: $\frac{1}{3}0+\frac{2}{3}2 = \frac{4}{3}2$, sia per I che per II. Se invece I sceglie T, i payoff attesi sono:

- se II gioca L_1L_2: $\frac{1}{3}1 + \frac{2}{3}1 = 1$ per I e $\frac{1}{3}2 + \frac{2}{3}0 = \frac{2}{3}$ per II

- se II gioca L_1R_2: $\frac{1}{3}1 + \frac{2}{3}0 = \frac{1}{3}$ per I e $\frac{1}{3}2 + \frac{2}{3}1 = \frac{4}{3}$ per II

- se II gioca R_1L_2: $\frac{1}{3}2 + \frac{2}{3}1 = \frac{4}{3}$ per I e $\frac{1}{3}1 + \frac{2}{3}0 = \frac{1}{3}$ per II

- se II gioca R_1R_2: $\frac{1}{3}2 + \frac{2}{3}0 = \frac{2}{3}$ per I e $\frac{1}{3}1 + \frac{2}{3}1 = 1$ per II

Pertanto, la forma strategica è la seguente:

$I \backslash II$	L_1L_2	L_1R_2	R_1L_2	R_1R_2
T	$(1, \frac{2}{3})$	$(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$	$(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$	$(\frac{2}{3}, 1)$
B	$(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$	$(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$	$(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$	$(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$

Si verifica immediatamente che il gioco dato ha 4 equilibri di Nash: (B, L_1L_2), (B, L_1R_2), (B, R_1L_2), (B, R_1R_2).

Non vi sono strategie fortemente dominanti. Sia la strategia B per I che la strategia L_1R_2 per II sono strettamente dominanti. Altre strategie dominanti non ve ne sono.

Esercizio 9 Soluzione
La forma strategica è (è sottolineata la "best reply" per I e sopralineata quella per II):

$I \backslash II$	L_1L_2	L_1R_2	R_1L_2	R_1R_2
T_1T_2	$(\underline{5}, 0)$	$(\underline{5}, 0)$	$(\underline{4}, \overline{4})$	$(\underline{4}, \overline{4})$
T_1B_2	$(\underline{5}, 0)$	$(\underline{5}, 0)$	$(\underline{4}, \overline{4})$	$(\underline{4}, \overline{4})$
B_1T_2	$(2, \overline{1})$	$(2, 0)$	$(2, \overline{1})$	$(2, 0)$
B_1B_2	$(0, 0)$	$(0, \overline{2})$	$(0, 0)$	$(0, \overline{2})$

Vi sono pertanto quattro equilibri in strategie pure: (T_1T_2, R_1L_2), (T_1T_2, R_1R_2), (T_1B_2, R_1L_2), (T_1B_2, R_1R_2).

Il gioco dato ha due sottogiochi propri. Uno, quello a sinistra in figura, ha come equilibrio R_1. Il sottogioco a destra ha, come unico equilibrio, (T_2, L_2), come si verifica agevolmente dalla forma strategica riportata qui sotto:

$I \backslash II$	L_2	R_2
T_2	$(2, 1)$	$(2, 0)$
B_2	$(0, 0)$	$(0, 2)$

Pertanto, dei quattro equilibri di Nash, l'unico che è perfetto nei sottogiochi (cioè l'unico la cui restrizione ai sottogiochi è ancora un equilibrio) è (T_1T_2, R_1L_2).

Esercizio 10 Soluzione
Indichiamo la "best reply" sottolineando i vari elementi della matrice:

$I \backslash II$	L	C	R
T	$0, 1$	$-1, \underline{3}$	$1, \underline{3}$
M	$0, \underline{2}$	$\underline{1}, 1$	$2, 0$
B	$\underline{1}, \underline{0}$	$\underline{1}, -1$	$\underline{3}, \underline{0}$

Quindi gli equilibri di Nash sono (B, L) e (B, R).
La strategia T è fortemente dominata da B. La strategia T è debolmente dominata da M e da B. La strategia M è debolmente dominata da B. Il giocatore II non ha strategie dominate.

Esercizio 11 Soluzione
La forma strategica del primo gioco è:

$I \backslash II$	AC	AD	BC	BD
E	$1, \underline{3}$	$\underline{1}, \underline{3}$	$2, 0$	$\underline{2}, 0$
F	$\underline{4}, \underline{2}$	$0, 1$	$\underline{4}, \underline{2}$	$0, 1$

Nella forma strategica abbiamo già sottolineato i payoff per mostrare la best reply e trovare gli equilibri di Nash. Gli equilibri di Nash sono (E, AD), (F, AC) e (F, BC). Di questi (F, AC) è l'unico equilibrio perfetto nei sottogiochi (cosa che si verifica agevolmente applicando l'induzione a ritroso).

La forma strategica del secondo gioco è:

$I \backslash II$	A	B
E	$1, \underline{3}$	$\underline{2}, 0$
F	$\underline{4}, \underline{2}$	$0, 1$

Anche qui abbiamo sottolineato, etc... Il gioco ha un solo equilibrio di Nash: (F, A).
Per quanto riguarda le strategie miste, usiamo come di solito $p, 1-p$ e $q, 1-q$ per indicare le strategie miste rispettivamente di I e II.
Il payoff atteso di I è:

$$f(p, q) = pq + 2p(1-q) + 4(1-p)q = pq + 2p - 2pq + 4q - 4pq =$$

$$= -5pq + 2p + 4q = p(2-5q) + 4q$$

Quindi per $q < 2/5$ la best reply per I è $p = 1$, per $q = 2/5$ è tutto $[0, 1]$, per $q > 2/5$ la best reply è $p = 0$.
Per II il payoff atteso è:

$$g(p, q) = 3pq + 2p(1-q) + (1-p)(1-q) = 3pq + 2q - 2pq + 1 - p - q + pq =$$

$$= 2pq - p + 1 + q = q(2p+1) + (1-q)$$

La best reply per II è sempre $q = 1$, qualunque sia p.

In figura 2 disegniamo le best reply:

Le best reply ci permettono di individuare gli equilibri di Nash in strategie miste. L'unico che troviamo è indicato in figura, e corrisponde a $p = 0$ e $q = 1$. Vale a dire, si tratta dell'equilibrio in strategie pure che già avevamo trovato.
Potevamo in realtà risparmiarci i conti, semplicemente osservando che la strategia A domina strettamente B.

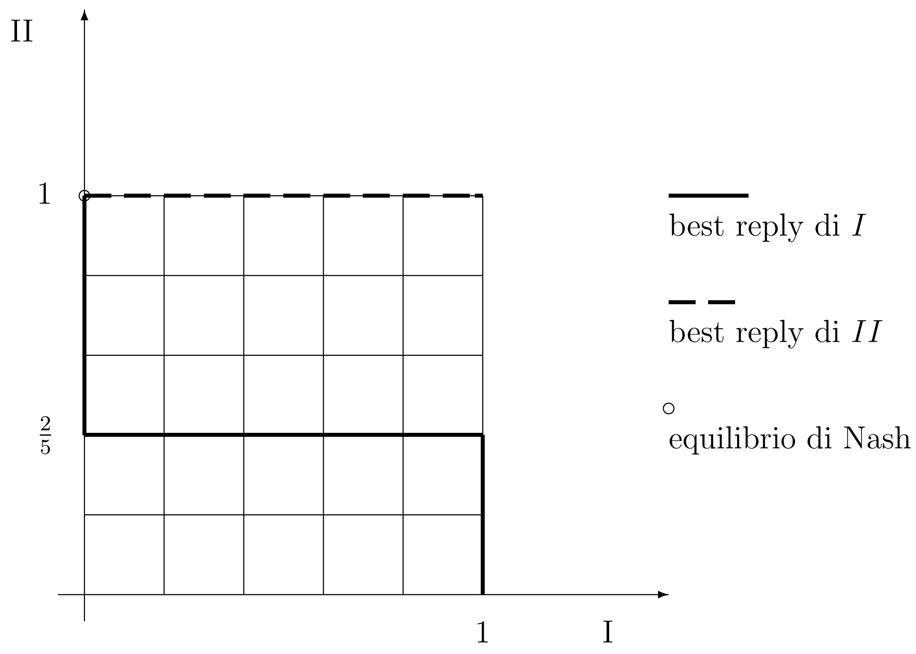


Figura 1: I grafici delle corrispondenze di miglior risposta

Esercizio 12 Soluzione

Strategie del giocatore I: A e B
Strategie del giocatore II: se A, C; se A, D

$I \backslash II$	C	D
A	$(1,2)$	$(0,0)$
B	$(2,1)$	$(2,1)$

N.B. Quando I gioca B, il gioco si conclude prima che II giochi la sua mossa.
Abbiamo due equilibri di Nash in strategie pure: (B,C) e (B,D) (si noti che solo (B,C), quello che si trova con l'induzione a ritroso, è perfetto nei sottogiochi).

Esercizio 13 Soluzione

In strategie pure non c'è equilibrio di Nash. Passo alle strategie miste e assegno distribuzione di probabilità sulle diverse mosse dei giocatori.

$$U_I(p,q) = 1(pq) + 3q(1-p) + 2p(1-q) + 1(1-p)(1-q)$$

$$U_{II}(p,q) = 2(pq) + 1q(1-p) + 1p(1-q) + 3(1-p)(1-q)$$

Fissato q, cerco la miglior risposta per I, cioè cerco, al variare di p, il max della funzione di utilità di I:
$U_I(p,q) = pq + 3q - 3pq + 2p - 2pq + 1 - q - p + pq = -3pq + 2q + p + 1 = (1-3q)p + 2q + 1$
Per q fissato, questa è l'equazione di una retta che considero nell'intervallo $[0,1]$ perché $0 \le p \le 1$.

$$\begin{array}{lll} \text{Se } 1-3q > 0, & \text{cioè } q < 1/3: & \text{max per } p = 1 \\ \text{Se } 1-3q < 0, & \text{cioè } q > 1/3: & \text{max per } p = 0 \\ \text{Se } 1-3q = 0, & \text{cioè } q = 1/3: & \text{max per ogni } p \end{array}$$

Fissato p, cerco la miglior risposta per II, cioè cerco al variare di q il max della funzione di utilità di II:
$U_{II}(p,q) = 2pq + q - pq + p - pq + 3 - 3q - 3p + 3pq = 3pq - 2q - 2p + 3 = (3p-2)q - 2p + 3$.

$$\begin{array}{lll} \text{Se } 3p-2 > 0, & \text{cioè } p > 2/3: & \text{max per } q = 1 \\ \text{Se } 3p-2 < 0, & \text{cioè } p < 2/3: & \text{max per } q = 0 \\ \text{Se } 3p-2 = 0, & \text{cioè } p = 2/3: & \text{max per ogni } q \end{array}$$

Disegnando nel piano cartesiano le curve di miglior risposta di I e di II, queste si incontrano in un solo punto $(2/3, 1/3)$ che corrisponde all'equilibrio di Nash in strategie miste. Questo significa che I gioca con $p = 2/3$ la strategia s_1 e con $p = 1/3$ gioca s_2. II gioca con $q = 1/3$ la sua strategia t_1 e con $q = 2/3$ gioca t_2.
Si ha, inoltre:

$$U_I(2/3, 1/3) = 5/3$$

$$U_{II}(2/3, 1/3) = 5/3$$

Esercizio 14 Soluzione

Per quanto riguarda le strategie miste, usiamo come di solito $p, 1-p$ e $q, 1-q$ per indicare le strategie miste rispettivamente di I e II.
Il payoff atteso di I è:

$$f(p,q) = 6pq + 2p(1-q) + 7(1-p)q = 6pq + 2p - 2pq + 7q - 7pq =$$

$$= -3pq + 2p + 7q = p(2 - 3q) + 7q$$

Quindi per $q < 2/3$ la best reply per I è $p = 1$, per $q = 2/3$ è tutto $[0, 1]$, per $q > 2/3$ la best reply è $p = 0$.
Per II il payoff atteso è:

$$g(p, q) = 6pq + 7p(1 - q) + 2(1 - p)q = 6pq + 7p + -7pq + 2q - 2pq =$$

$$= -3pq + 2q + 7p = q(2 - 3p) + 7p$$

Quindi per $p < 2/3$ la best reply per II è $q = 1$, per $p = 2/3$ è tutto $[0, 1]$, per $p > 2/3$ la best reply è $q = 0$.

In figura 2 disegniamo le best reply.

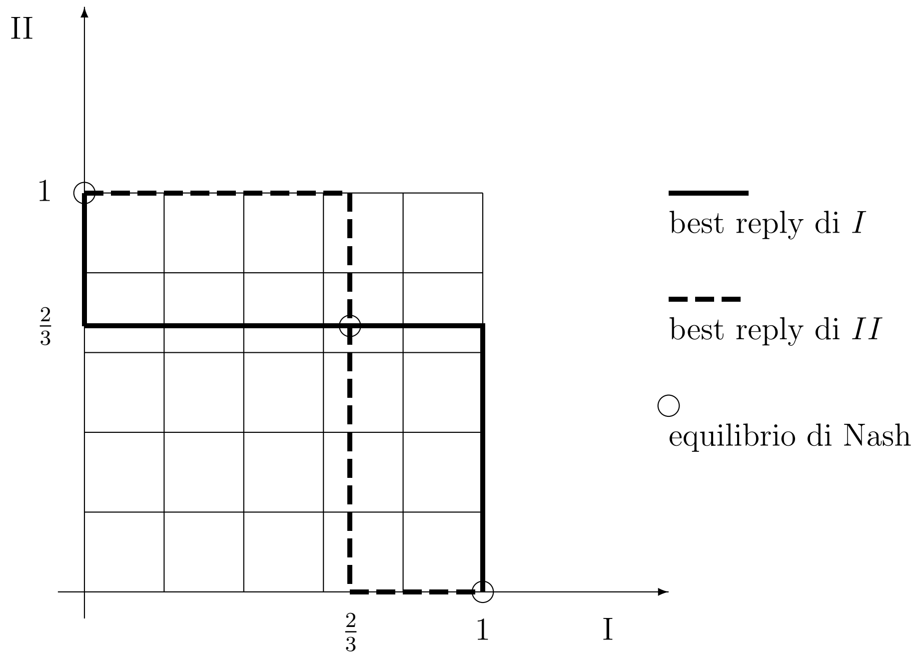


Figura 2: I grafici delle corrispondenze di miglior risposta

Le best reply ci permettono di individuare gli equilibri di Nash in strategie miste. Ritroviamo i due equilibri puri ed uno in strategie completamente miste (il cui payoff atteso è di 14/3 per entrambi i giocatori).

Esercizio 15 Soluzione

parte a)

Se $(\bar{x}, \bar{y})$ è un equilibrio di Nash, si ha (si ricordi che $X = Y$):

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}) \qquad \text{per ogni } x \in X \tag{1}$$

$$g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y) \qquad \text{per ogni } y \in X \tag{2}$$

Ma allora:

$$g(\bar{y}, \bar{x}) = f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}) = g(\bar{y}, x) \qquad \text{per ogni } x \in X \tag{3}$$

Ma:

$$g(\bar{y}, \bar{x}) \geq g(\bar{y}, x) \qquad \text{per ogni } x \in X \tag{4}$$

è proprio la seconda condizione (cioè quella relativa al giocatore II) che viene richiesta affinché $(\bar{y}, \bar{x})$ sia un equilibrio di Nash. Si noti che essa è perfettamente equivalente a:

$$g(\bar{y}, \bar{x}) \geq g(\bar{y}, y) \qquad \text{per ogni } y \in X \tag{5}$$

Allo stesso modo si ottiene che $(\bar{y}, \bar{x})$ soddisfa anche la prima condizione dell'equilibrio di Nash.

parte b)

No. Basta considerare:

I \ II	A	B
A	$(0,0)$	$(0,0)$
B	$(0,0)$	$(0,0)$

Un esempio meno banale è offerto dalla "battaglia dei sessi" (tenendo conto di quanto verrà detto al punto d)).

parte c)

No. Tanto per cominciare, un gioco simmetrico può non avere equilibri. Ad esempio, il "pari o dispari" (che NON ha equilibri. Ovviamente la sua estensione mista sì). Comunque, anche se ha equilibri, non è detto che ne abbia di simmetrici, come mostra il gioco "chicken" (anche qui, non mi sto riferendo alla sua estensione mista):

I \ II	A	B
A	$(3,3)$	$(2,4)$
B	$(4,2)$	$(1,1)$

parte d)

Dato un gioco (X, Y, f, g), lo potremmo chiamare "essenzialmente simmetrico" se $\exists Z$, $\phi : Z \to X$, $\psi : Z \to Y$, corrispondenze biunivoche, tali che, posto $\tilde{f}(s,t) = f(\phi(s), \psi(t))$ e $\tilde{g}(s,t) = g(\phi(s), \psi(t))$, il gioco $(Z, Z, \tilde{f}, \tilde{g})$ è un gioco simmetrico. L'idea è quindi che l'apparente mancanza di simmetria derivi solo dalla assegnazione delle "etichette" alle strategie dei giocatori.

Vediamo, per esempio, come la "battaglia dei sessi" sia un gioco essenzialmente simmetrico. Basta prendere $Z = \{H, K\}$ e definire $\phi(H) = T, \phi(K) = B, \psi(H) = R, \psi(K) = L$. Così, trasformiamo la "battaglia dei sessi" rappresentata qui sotto a sinistra, nel gioco di destra che soddisfa la definizione formale di gioco simmetrico:

I \ II	L	R
T	$2,1$	$0,0$
B	$0,0$	$1,2$

I \ II	H	K
H	$0,0$	$2,1$
K	$1,2$	$0,0$

Si può facilmente verificare come: $\tilde{f}(H,H) = f(\phi(H), \psi(H)) = f(T,R) = 0$, $\tilde{f}(H,K) = f(\phi(H), \psi(K)) = f(T,L) = 2$, etc. Analogamente per i payoff di II, ad esempio: $\tilde{g}(K,H) = g(\phi(K), \psi(H)) = g(B,R) = 2$. Si noti che $\tilde{f}(H,K) = \tilde{g}(K,H)$, come richiede la condizione di simmetria. In effetti, si può agevolmente verificare come il gioco $(Z, Z, \tilde{f}, \tilde{g})$ sia un gioco simmetrico.

Un altro esempio è dato dal dilemma del prigioniero, dato nella tabella a sinistra. Qui basta proprio solo "ridenominare" le strategie di II (usare T al posto di L e B al posto di R) e si ottiene il gioco di destra che soddisfa la condizione di simmetria.

I \ II	L	R
T	$3,3$	$1,4$
B	$4,1$	$2,2$

I \ II	T	B
T	$3,3$	$1,4$
B	$4,1$	$2,2$

Per altro verso, anche il gioco sotto a sinistra (che ovviamente è la battaglia dei sessi) è simmetrico, pur di definire $Z = \{H, K\}$ e definire $\phi(H) = H, \phi(K) = K, \psi(H) = K, \psi(K) = H$: vedasi la tabella di destra.

I \ II	H	K
H	$2,1$	$0,0$
K	$0,0$	$1,2$

I \ II	H	K
H	$0,0$	$2,1$
K	$1,2$	$0,0$

Critiche e commenti sono lasciati a voi.

Esercizio 16 Soluzione

L'affermazione è scorretta. Ad esempio, le seguenti sono due *diverse* strategie per I:

$$x_1 = A\, A_{AA}\, A_{AB}\, A_{AC}\, A_{BA}\, A_{BB}\, A_{BC}\, A_{CA}\, A_{CB}\, A_{CC} \tag{6}$$

$$x_2 = A\, A_{AA}\, A_{AB}\, A_{AC}\, B_{BA}\, B_{BB}\, B_{BC}\, B_{CA}\, B_{CB}\, B_{CC} \tag{7}$$

Il significato dei simboli dovrebbe essere chiaro. Il primo simbolo indica la scelta fatta all'inizio da I (in entrambe le strategie, I sceglie A alla sua prima mossa); gli altri simboli indicano cosa egli fa dopo le diverse possibili storie: ad esempio, B_{CA} indica che I, quando gli ritocca giocare, gioca B (qualora lui avesse scelto C alla prima mossa e II avesse giocato A).

Si verifica agevolmente come, qualunque sia la strategia y usata da II, le coppie di strategie (x_1, y) e (x_2, y) danno luogo entrambe alla storia $AUAV$ (dove U e V indicano le scelte che II si troverà ad effettuare usando la strategia y da lui scelta). In particolare, se II decide di usare la strategia che prevede di scegliere sempre A ad ogni suo nodo decisionale, (x_1, y) e (x_2, y) danno luogo entrambe alla storia $AAAA$. Quindi, le strategie a disposizione dei giocatori sono più delle possibili storie del gioco.

D'altronde, il numero di strategie per I è $3 \cdot 3^9$, mentre quello per II è $3^3 \cdot 3^{27}$. Come si vede, i conti non tornano. Le strategie sono molte di più delle storie.

Osservazione. Le due strategie di I descritte in (6) e (7) differiscono tra loro per via di scelte diverse che I progetta di fare in nodi che non saranno raggiunti vista la *sua scelta* fatta al primo nodo decisionale. Potrebbe cambiare qualcosa che usassimo la forma normale ridotta? (Per dettagli e terminologia sulla forma normale ridotta, vedasi Myerson).