Aste, appunti sbrigativi

Appunti di
Fioravante PATRONE
http://www.diptem.unige.it/patrone/default.htm

versione del 25 maggio 2006

NOTA: tranne che per le prime pagine, il contenuto di questi appunti non è altro che una "riduzione" (e "spiegazione", oltre che traduzione) di parte di un capitolo di Krishna

Vendita di un oggetto indivisibile

Vedremo due casi: asta in busta chiusa al primo prezzo e asta in busta chiusa al secondo prezzo (altri due modelli famosi di aste sono: asta inglese e asta olandese[1])

Faremo le seguenti assunzioni

C'è un oggetto dato.

C'è un insieme dato (fissato) $N = \{1, \dots, n\}$ di potenziali bidders

Ognuno dei bidder *deve* fare un'offerta, un bid, $b_i \in [0, \infty[$

Dato un profilo di offerte, l'esito è:

- (primo prezzo) l'oggetto viene dato al miglior offerente (estratto a sorte con uguale probabilità fra i migliori offerenti in caso di parità). Chi si aggiudica l'oggetto paga una quantità di soldi pari alla sua offerta

- (secondo prezzo) come per il caso precedente, l'oggetto viene dato al miglior offerente (estratto a sorte con uguale probabilità fra i migliori offerenti in caso di parità). Chi si aggiudica l'oggetto paga una quantità di soldi pari alla seconda miglior offerta

Le preferenze dei giocatori (= bidders) sono su esiti in $\Delta(N \times [0, \infty[)$. Le preferenze sono rappresentate da funzioni di utilità di vNM definite su $N \times [0, \infty[$ così definite:

$$u_i(j, x) = \begin{cases} v_i - x & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

[1] Nell'asta inglese i bidder possono fare offerte al rialzo. Vi sono varie regole in proposito, che magari fissano un rialzo minimo, oppure un tempo massimo entro il quale l'asta si deve concludere, etc. Le regole di aggiudicazione sono uguali a quelle per l'asta al primo prezzo (non può esserci parità, qui). Nell'asta olandese si parte da una valutazione (alta) e poi si fa partire un orologio che scandisce la discesa uniforme del prezzo. Il primo che dice Ok si aggiudica l'oggetto.

Dove v_i è un dato caratteristico, specifico del giocatore $i \in N$.

Esempio 1 $N = \{1, 2, 3\}$. Se il profilo dei bid è $(7, 7, 5)$, per l'asta al primo prezzo l'esito è: $(1/2, (1, 7); 1/2, (2, 7))$ (gli altri elementi di $N \times [0, \infty[$ hanno probabilità zero); per l'asta al secondo prezzo l'esito è: $(1/2, (1, 7); 1/2, (2, 7))$ (gli altri elementi di $N \times [0, \infty[$ hanno probabilità zero).

Se il profilo dei bid è $(7, 6, 5)$, per l'asta al primo prezzo l'esito è: $(1, (1, 7))$ (gli altri elementi di $N \times [0, \infty[$ hanno probabilità zero); per l'asta al secondo prezzo l'esito è: $(1, (1, 6))$ (gli altri elementi di $N \times [0, \infty[$ hanno probabilità zero). ▲

Si noti che una delle ragioni per cui usiamo le utilità di vNM, oltre al fatto che l'esito di un profilo di bid è aleatorio, è anche il fatto che assumeremo una situazione di incompletezza informativa

Osservo che non abbiamo messo alcun "prezzo di riserva". Questo ha due conseguenze: la prima è che l'oggetto sarà sempre aggiudicato. La seconda riguarda la possibile "violenza" che esercitiamo sui bidders obbligandoli a fare un'offerta: qui può esserci effettivamente una "violenza" nei confronti di chi abbia una valutazione negativa dell'oggetto (ovvero, per lui l'oggetto è un "bad"), in quanto può succedere che lui si aggiudichi (a prezzo zero, magari, perché può offrire zero) un oggetto che non vorrebbe. Insomma, l'assunzione che i potenziali bidder siano obbligati a fare un'offerta ha senso (voglio dire, ci fa rimanere essenzialmente nel contesto in cui uno può scegliere se fare uno scambio o no) se supponiamo che sia $v_i \geq 0$ per ogni $i \in N$. Insomma, il bene indivisibile non è una cucciolata di gattini (mica li vorrete separare!), né un coccodrillo, né (con qualche "licenza poetica" sulla indivisibilità) un container da 20 tonnellate pieno di spazzatura, e neanche una bella fiorentina (per un vegetariano).

Non abbiamo messo delle "participation fees". Anche qui, se ci fosse un prezzo positivo da pagare solo per poter partecipare all'asta, ne potrebbe venir fuori un risultato negativo per chi abbia una valutazione dell'oggetto inferiore al valore della "participation fee".

Le preferenze dei bidders potrebbero avere una struttura meno banale. Ad esempio, uno potrebbe essere dispiaciuto che l'oggetto vada ad un altro (due collezionisti rivali). Altri casi possono essere facilmente immaginati.

Assumiamo infine che i bidders non abbiano vincoli di budget. Infatti, i bid sono in $[0, \infty[$.

Non abbiamo parlato dell'auctioneer. Occorre distinguere tra due soggetti diversi. Il proprietario dell'oggetto e l'auctioneer vero e proprio. Vi sono casi in cui l'auctioneer cerca di influenzare i comportamenti dei bidders (ad esempio, sollecitando offerte nelle aste inglesi). Non ci occuperemo di questi aspetti. L'auctioneer è per noi una macchina del tutto neutrale. Prende il profilo dei bid in ingresso e sputa fuori l'esito previsto dalle regole dell'asta.

Per quanto riguarda il proprietario dell'oggetto, egli ha essenzialmente una facoltà: decidere quale asta utilizzare (ivi incluso non usarne nessuna, oltre al fatto che potrebbe usare altri modalità "posted price", contrattazione).

Limitandoci al solo contesto delle aste, è evidente che si pone un problema di "mechanism design": scegliere l'asta (= "game form") ottimale. Non ci occuperemo di questo aspetto. Noi ci limiteremo a vedere se il proprietario preferisce l'esito (atteso) derivante dall'asta al primo prezzo o quello al secondo prezzo. Anche qui, come abbiamo fatto per i bidders, assumeremo una struttura di preferenze piuttosto semplice: la sua funzione di utilità dipende solo dai soldi che riuscirà ad incassare (non ha bidders amici o bidders che detesta, ad esempio). Detto questo, considereremo sia il caso di indifferenza al rischio (in questo caso la sua funzione di utilità coincide con i soldi che incassa) che il caso di avversione al rischio.

Il proprietario potrebbe avere degli obiettivi ancora più complessi (si pensi al caso in cui sia una Pubblica Amministrazione): potrebbe volere che sia ridotto al minimo il rischio di collusione, oppure potrebbe essere interessato al fatto che l'oggetto venga assegnato a chi lo valuta di più (il che può essere ricondotto ad una condizione di efficienza).

Tornando ai bidders, abbiamo una "game form" ed abbiamo le loro preferenze, come sopra descritte. Abbiamo quindi un gioco (in forma strategica). Restano da precisare le ipotesi su razionalità e intelligenza dei giocatori, nonché quelle sulla conoscenza dei parametri del gioco. Assumeremo conoscenza comune della razionalità ed intelligenza, mentre per quanto riguarda i parametri che identificano il tipo di preferenze dei giocatori, ci metteremo in un contesto di informazione incompleta. Per la precisione, assumeremo di trovarci in un caso "coerente", ovvero che sia data una prior sui profili di tipi dei giocatori, e assumeremo che questa prior sia common knowledge.

Supporremo che i "tipi" dei bidders, ovvero i v_i, siano estratti a sorte, con estrazioni indipendenti e identicamente distribuite su un intervallo $[0, \omega] \subseteq \mathbb{R}$ secondo una data funzione di ripartizione (o "cumulata") F. In altre parole, ci mettiamo nel caso descritto, nella letteratura sulle aste, come caso a "valori privati[2] indipendenti".

---

[2]Il termine "valori privati" è dovuto alle assunzioni fatte sulla funzione di utilità: il giocatore, una volta che conosce il suo tipo, è *certo* della sua valutazione. Essa non dipende da altri fattori, come ad esempio la valutazione degli altri, o da eventuali segnali che lui possa ricevere in futuro su caratteristiche dell'oggetto messo all'asta.

Per semplificare la trattazione, assumeremo che la F sia uniformemente distribuita su $[0, \omega]$. Quindi,

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t \leq 0 \\ t/\omega & \text{se} \quad 0 \leq t \leq \omega \\ 1 & \text{se} \quad t \geq \omega \end{cases}$$

Abbiamo allora un gioco ad informazione incompleta giocato fra i bidders. Come di consueto per un gioco ad informazione incompleta, assumeremo che il bidder sia informato del suo tipo prima di "giocare", ovvero di sottomettere il suo bid.

Cercheremo gli equilibri (Nash-Bayesiani) dei due giochi (quello in cui la "game form" è l'asta al primo prezzo e quello corrispondente al secondo prezzo). Poi analizzeremo vari parametri interessanti: la probabilità che ha un bidder di aggiudicarsi l'oggetto, il pagamento atteso (sia in generale, sia sotto l'ipotesi che si aggiudichi l'oggetto). Calcoleremo anche il guadagno atteso del proprietario dell'oggetto.

Una strategia per il bidder i è, come in un qualsiasi gioco ad informazione incompleta, una funzione $\beta_i : [0, \omega] \to [0, \infty[$.

Ciò che faremo sarà più precisamente vedere se vi sono degli equilibri *simmetrici.* In altre parole, cercheremo β tale che $(\beta, \dots, \beta)$ sia un equilibrio. Visto che abbiamo due giochi, distingueremo il caso al primo prezzo da quello al secondo prezzo usando la notazione β^1 e β^2 rispettivamente.

Cominciamo con l'asta al secondo prezzo. Qui c'è poco da faticare. E' facile dimostrare che la strategia $\beta^2(x) = x$ è debolmente dominante (cosa che vale anche sotto ipotesi ben più generali di quelle che abbiamo fatto qui, in particolare non serve l'ipotesi che le valutazioni siano indipendenti o identicamente distribuite). Insomma, il nostro bidder non deve far altro che scrivere una offerta pari alla sua valutazione dell'oggetto.

Domandiamoci quale sia, in equilibrio, il pagamento atteso per un bidder che abbia una valutazione pari a x. Indichiamo tale pagamento atteso con $m+2$, dove "m" ci ricorda che parliamo di "money" e l'apice "^{2}" lo mettiamo perché stiamo considerando un'asta al secondo prezzo. Per semplicità e data la simmetria della situazione, supponiamo che sia il bidder 1.

E':

$$m^2(x) = \mathbb{P}(\text{vincere}) \cdot \mathbb{E}(\text{ pagamento in caso di vincita }) =$$

$$= \mathbb{P}(\text{vincere}) \cdot \mathbb{E}(\text{ secondo bid più alto} \mid x \text{ è il bid più alto }) =$$

$$= \mathbb{P}(\text{vincere}) \cdot \mathbb{E}(\text{ seconda valutazione più alta} \mid x \text{ è la valutazione più alta }) =$$

$$= F_1^{(n-1)}(x) \cdot \mathbb{E}(Y_1^{(n-1)} \mid Y_1^{(n-1)} < x) = \qquad (1)$$

Spieghiamo le notazioni. Possiamo immaginare che il tipo di un giocatore sia scelto con un meccanismo aleatorio (cioè, una variabile aleatoria) $X : [0,1] \to [0,\omega]$, con $X(s) = s\omega$. La funzione di ripartizione di X è, naturalmente, la F sopra indicata. Ovvero, $F(t) = t/\omega$ nell'intervallo rilevante. La scelta di un profilo di tipi può essere descritta da una variabile aleatoria $X^{(n)} : [0,1]^n \to [0,\omega]^n$, definita come $X^{(n)}(s_1,\dots,s_n) = (s_1\omega,\dots,s_n\omega)$.

La $Y_1^{(n-1)}$ è la "higher order statistics"[3] del set di $n-1$ variabili aleatorie $X_2,\dots,X_n$. Ovverossia: $Y_1^{(n-1)}(s_2,\dots,s_n) = \max\{s_2\omega,\dots,s_n\omega\}$.

La ipotesi di i.i.d. (indipendenti e identicamente distribuite) ci permette di concludere immediatamente che la funzione di ripartizione $F_1^{(n-1)}$ è semplicemente F^{n-1}. Cioè, $F_1^{(n-1)}(t) = F^{n-1}(t) = (F(t))^{n-1}$. E' $Y_1^{(n-1)} < t$ se e solo se *ogni* X_i (per $i > 1$) è minore di t; da qui la formula, grazie alla ipotesi di indipendenza. Quindi, nel caso nostro di distribuzione uniforme, $F_1^{(n-1)}(t) = (t/\omega)^{n-1}$. La funzione densità di $F_1^{(n-1)}$ sarà quindi data dalla formula:

$$f_1^{(n-1)}(t) = (F_1^{(n-1)})'(t) = (n-1)\frac{1}{\omega}(\frac{t}{\omega})^{n-2}.$$

Allora, dire che x è la valutazione più alta equivale a dire che $Y_1^{(n-1)} < x$. E il prezzo che il vincitore è tenuto a pagare in un'asta al secondo prezzo è il bid più alto tra tutti i rimanenti $n-1$ giocatori. Questo, e le notazioni sopra introdotte, giustificano il termine $\mathbb{E}(Y_1^{(n-1)} \mid Y_1^{(n-1)} < x)$ nella (1). Che la probabilità di vincere per il bidder 1, la cui valutazione sia x, sia data da $F_1^{(n-1)}(x)$ è ovvio per definzione di funzione di ripartizione.

Ora, per una generica variabile aleatoria X la cui funzione di ripartizione sia F e la densità f si ha che:

$$\mathbb{E}(X \mid X < x) = \frac{1}{F(x)} \int_0^x t f(t)\, dt$$

Ovverossia:

$$F(x) \cdot \mathbb{E}(X \mid X < x) = \int_0^x t f(t)\, dt.$$

Integrando per parti:

$$\int_0^x t f(t)\, dt = xF(x) - \int_0^x F(t)\, dt.$$

[3]Date m variabili aleatorie $X_i : S \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,\dots,m\}$ la "higher order statistics" di questo set di m variabili aleatorie è definita come $Y_1^{(m)}(s) = \max\{X_1(s),\dots,X_m(s)\}$. L'indice (m) indica che riguarda appunto un insieme di m variabili aleatorie, mentre il pedice 1 ci dice che si tratta della "higher order" statistics (possiamo anche prendere la "second order", la "third order", etc.).

Quindi:

$$F(x) \cdot \mathbb{E}(X \mid X < x) = xF(x) - \int_0^x F(t)\, dt.$$

Nel nostro caso, abbiamo:

$$\begin{aligned}
F_1^{(n-1)}(x) \cdot \mathbb{E}(Y_1^{(n-1)} \mid Y_1^{(n-1)} < x) &= \int_0^x t f_1^{(n-1)}(t)\, dt = \\
&= xF_1^{(n-1)}(x) - \int_0^x F_1^{(n-1)}(t)\, dt = \\
&= x\left(\frac{x}{\omega}\right)^{n-1} - \int_0^x \left(\frac{t}{\omega}\right)^{n-1} dt = \\
&= x\left(\frac{x}{\omega}\right)^{n-1} - \left(\frac{\omega}{n} \cdot \left(\frac{t}{\omega}\right)^{n}\Bigg|_0^x\right) = \\
&= x\left(\frac{x}{\omega}\right)^{n-1} - \left(\frac{\omega}{n} \cdot \left(\frac{x}{\omega}\right)^{n}\right) = \\
&= \left(\frac{x}{\omega}\right)^{n-1} \cdot \left(x - \frac{x}{\omega} \cdot \frac{\omega}{n}\right) = \\
&= \left(\frac{x}{\omega}\right)^{n-1} x\left(1 - \frac{1}{n}\right) =
\end{aligned}$$

Esempio 2 Per curiosità, vediamo cosa accade nel caso particolare in cui $n = 2$.

Se $x = 0$, viene zero (e ci mancherebbe...).

Se $x = \omega/2$, viene $\frac{\omega^2}{8\omega} = \frac{\omega}{8}$. Cosa che possiamo capire senza alcuna formula. Se la valutazione dell'oggetto è $\omega/2$, la probabilità che la valutazione sia la più alta, e quindi di aggiudicarsi l'oggetto, è $1/2$. Dopo di ché, se se lo aggiudica, le valutazioni dell'altro sono uniformemente distribuite su $[0, \omega/2]$ e quindi il valore atteso è $\omega/4$. Ne consegue che il pagamento atteso ex ante è $\frac{1}{2} \cdot \frac{\omega}{4} = \frac{\omega}{8}$.

Se $x = \omega$, viene $\omega/2$ (e anche questo risultato si può facilmente capire con lo stesso tipo di ragionamenti appena visti). ▲

Aste al primo prezzo.

Cerchiamo di capire come potrebbe essere fatto un equilibrio simmetrico.

Supponiamo la strategia β^1 (uguale per tutti i giocatori) sia strettamente crescente (ricordo che $\beta^1 : [0, \omega] \to [0, \infty[$) e derivabile.

Un giocatore (diciamo il giocatore 1) riceve un segnale x (la sua valutazione dell'oggetto) e vogliamo sapere quale sia il suo bid $b = \beta^1(x)$ ottimale.

Osserviamo che:
- non ha senso un bid $b > \beta^1(\omega)$. Perché il bidder vincerebbe di sicuro, ma potrebbe vincere con certezza lo stesso diminuendo un poco il suo bid (e quindi il suo esborso);
- se un bidder ha valore 0, il suo bid sarà uguale a 0 (se fosse positivo, avrebbe probabilità positiva di vincere).

Quindi: $\beta^1(0) = 0$ e $b = \beta^1(x) \leq \beta^1(\omega)$.

Osserviamo che il bidder 1 vince se fa l'offerta più alta (osservazione non molto profonda, lo ammetto). Questo si verifica ogniqualvolta $\max_{i \neq 1} \beta^1(X_i) < b$.

Ma β^1 è strettamente crescente, quindi $\max_{i \neq 1} \beta^1(X_i) = \beta^1(\max_{i \neq 1}(X_i))$.

Ma $\max_{i \neq 1}(X_i)$ non è altro che la $Y_1^{(n-1)}$ introdotta prima, per le aste al secondo prezzo.

Allora, 1 vince se e solo se $\beta^1(Y_1^{(n-1)}) < b$. Equivalentemente, se $Y_1^{(n-1)} < (\beta^1)^{-1}(b)$

E il suo payoff atteso è: $F_1^{(n-1)}\left((\beta^1)^{-1}(b)\right) \cdot (x - b)$.

Perché è il payoff atteso? Perché $F_1^{(n-1)}\left((\beta^1)^{-1}(b)\right)$ è la probabilità dell'evento che 1 vinca (ovvero che $Y_1^{(n-1)} < (\beta^1)^{-1}(b)$) e in tal caso il payoff è $x - b$; se 1 perde, il suo payoff è 0.

Allora, cerchiamo la best reply.

Prima, un po' di notazioni per semplificare. Indico con G la $F_1^{(n-1)}$, con g la sua densità (cioè, $g = G'$; e $g = f_1^{(n-1)}$); infine, chiamo semplicemente β la β^1.

Allora, cerchiamo b che massimizza $G\left(\beta^{-1}(b)\right) \cdot (x - b)$.

Una condizione necessaria è che la derivata prima di questa funzione di b sia nulla. Cioè (usiamo la regola di derivazione delle funzioni composte e della funzione inversa[4]):

$$\frac{G'\left(\beta^{-1}(b)\right)}{\beta'\left(\beta^{-1}(b)\right)} \cdot (x-b) - 1 \cdot G\left(\beta^{-1}(b)\right) = 0$$

Ovvero, usando g, densità di G:

$$\frac{g\left(\beta^{-1}(b)\right)}{\beta'\left(\beta^{-1}(b)\right)} \cdot (x-b) - G\left(\beta^{-1}(b)\right) = 0$$

Se $b = \beta(x)$, ovvero se siamo in equilibrio:

$$\frac{g\left(\beta^{-1}(\beta(x))\right)}{\beta'\left(\beta^{-1}(\beta(x))\right)} \cdot (x-\beta(x)) - G\left(\beta^{-1}(\beta(x))\right) = 0$$

Cioè:

$$\frac{g(x)}{\beta'(x)} \cdot (x-\beta(x)) - G(x) = 0$$

Cioè:

$$g(x) \cdot (x-\beta(x)) - G(x) \cdot \beta'(x) = 0$$

Ovvero:

$$G(x) \cdot \beta'(x) + g(x) \cdot \beta(x) = xg(x)$$

Quindi:

$$\frac{d}{dx}\left(G(x) \cdot \beta(x)\right) = xg(x)$$

Allora, per la formula fondamentale del calcolo integrale:

$$G(x) \cdot \beta(x) - G(0) \cdot \beta(0) = \int_0^x tg(t)\, dt$$

Essendo $\beta(0) = 0$, ricaviamo:

$$\beta(x) = \frac{1}{G(x)} \int_0^x tg(t)\, dt = \mathbb{E}(Y_1^{(n-1)} \mid Y_1^{(n-1)} < x)$$

[4]Data una funzione reale di variabile reale ψ, se sono soddisfatte le opportune condizioni, la derivata della funzione inversa ψ^{-1} è data dalla formula seguente:

$$\frac{d}{dt}\left[\psi^{-1}(t)\right] = \frac{1}{\frac{d}{dz}\psi(z)|_{z=\psi^{-1}(t)}}.$$

Ad esempio:

$$\frac{d}{dt}\left[\arctan(t)\right] = \frac{1}{\frac{d}{dz}\tan(z)|_{z=\arctan(t)}} = \frac{1}{\left(1+\tan^2 z\right)|_{z=\arctan(t)}} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Ricordiamo che $G = F_1^{(n-1)}$ (era una notazione di comodo).

NOTA BENE: ovviamente *non abbiamo dimostrato* che β sia la soluzione. Abbiamo solo ricavato una funzione indiziata fortemente di esserlo. Per la verifica che lo sia effettivamente, rinvio a Krishna.

Nel nostro caso particolare (le valutazioni sono uniformemente distribuite su $[0, \omega]$), avevamo:

$$F_1^{(n-1)}(x) = (x/\omega)^{n-1}$$

E avevamo già calcolato che:

$$F_1^{(n-1)}(x) \cdot \mathbb{E}(Y_1^{(n-1)} \mid Y_1^{(n-1)} < x) = \left(\frac{x}{\omega}\right)^{n-1} x \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Quindi:

$$\beta(x) = x \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Calcoliamo ora il pagamento atteso nell'asta al primo prezzo. Abbiamo:

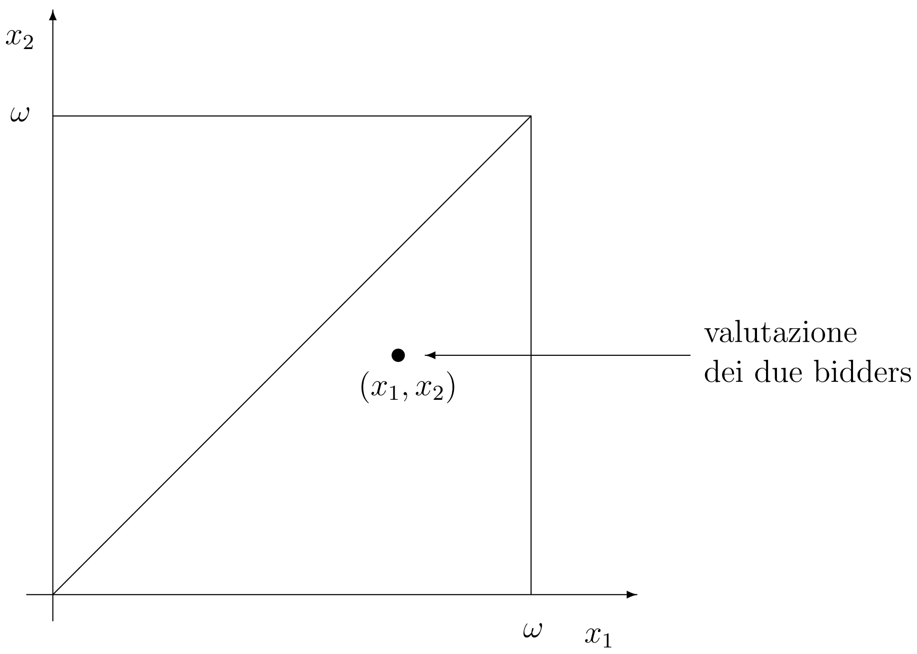
$$m^1(x) = \mathbb{P}(\text{vincere}) \cdot \mathbb{E}(\text{ pagamento in caso di vincita }) =$$

$$= \mathbb{P}(\text{vincere}) \cdot \mathbb{E}(\beta(x)) =$$

$$= F_1^{(n-1)}(x) \cdot \mathbb{E}(Y_1^{(n-1)} \mid Y_1^{(n-1)} < x) \tag{2}$$

Il primo fattore nella formula (2) è calcolato esattamente come si è fatto per l'asta al secondo prezzo. Il secondo fattore, anche se ricavato seguendo una diversa strada, coincide con quello che avevamo per l'asta al secondo prezzo. Come si vede, qualunque sia x, il pagamento atteso di un giocatore in un'asta al primo o secondo prezzo è identico.

Facciamo ora qualche conto dal punto di vista del proprietario. Li faccio nel caso particolare di due bidders.



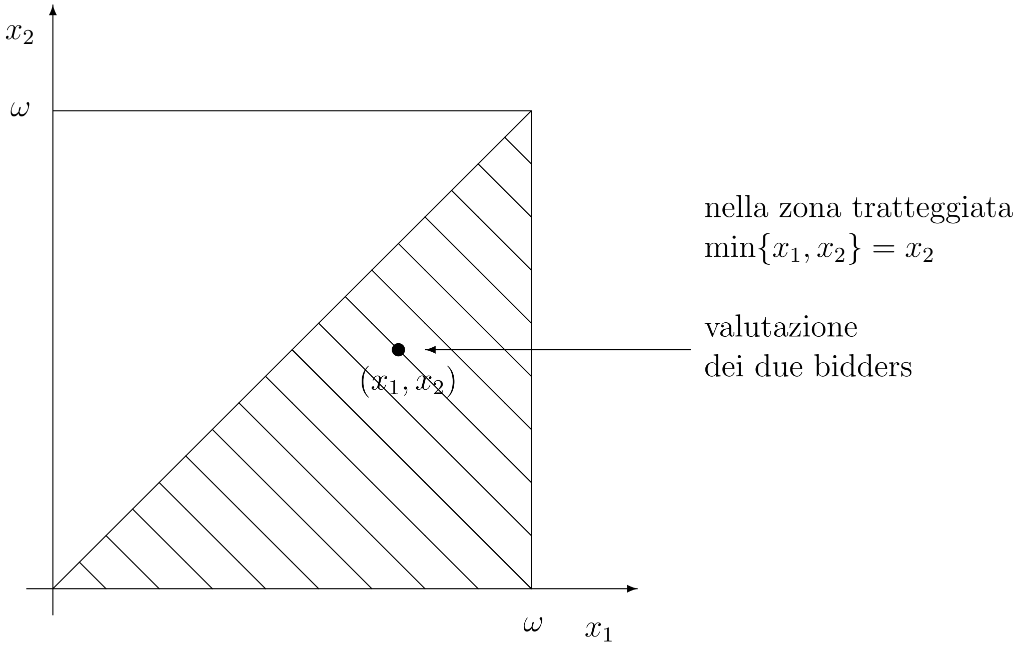
Cominciamo con l'asta al secondo prezzo. Abbiamo:

$$(x_1, x_2) \mapsto (\beta^2(x_1), \beta^2(x_2)) = (x_1, x_2)$$

Il payoff per il proprietario è:

$$\min\{x_1, x_2\}$$

Che è uguale a x_2 nella zona tratteggiata in figura:



Il payoff atteso è (la prima uguaglianza sfrutta l'osservazione appena fatta e descritta anche in figura):

$$\iint_{[0,\omega]\times[0,\omega]} \frac{1}{\omega^2} \min\{x_1, x_2\}\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \frac{2}{\omega^2} \int_0^\omega dx_1 \int_0^{x_1} x_2\, dx_2 = \frac{2}{\omega^2} \int_0^\omega \frac{x_1^2}{2}\, dx_1 =$$

$$= \frac{2}{\omega^2} \frac{\omega^3}{2 \cdot 3}\, dx_1 = \frac{\omega}{3}$$

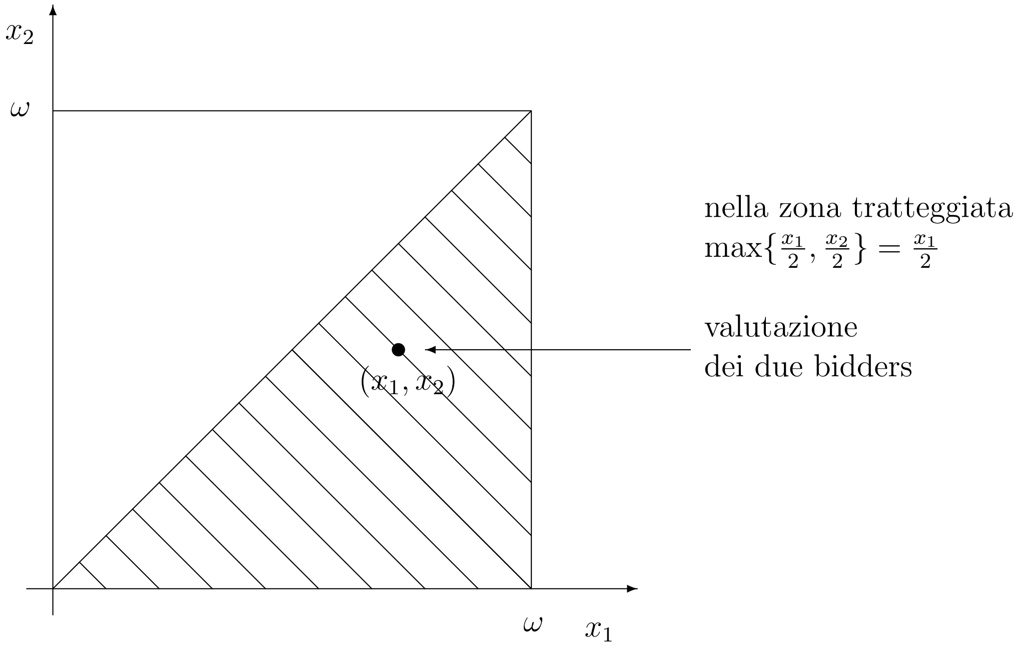
Passiamo all'asta al primo prezzo. Abbiamo:

$$(x_1, x_2) \mapsto (\beta^1(x_1), \beta^1(x_2)) = \left(x_1(1 - \frac{1}{2}), x_2(1 - \frac{1}{2}) \right) = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2} \right)$$

Il payoff per il proprietario è:

$$\max\{\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}\}$$

Che è uguale a $\frac{x_1}{2}$ nella zona tratteggiata in figura:



Il payoff atteso è (anche questa volta la prima uguaglianza sfrutta l'osservazione appena fatta e descritta anche in figura):

$$\iint_{[0,\omega]\times[0,\omega]} \frac{1}{\omega^2} \max\{\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}\}\, dx_1\, dx_2 =$$

$$\frac{2}{\omega^2}\int_0^\omega dx_1 \int_0^{x_1} \frac{x_1}{2}\, dx_2 = \frac{2}{\omega^2}\int_0^\omega \frac{x_1}{2}\cdot x_1\, dx_1 =$$

$$= \frac{2}{\omega^2}\int_0^\omega \frac{x_1^2}{2}\, dx_1 = \frac{2}{\omega^2}\frac{\omega^3}{2\cdot 3}\, dx_1 = \frac{\omega}{3}$$

Quindi il payoff atteso è identico. Ma le "integrande" non sono uguali!

Esempio 3 Ad esempio, se $\omega = 10$, $x_1 = 8$, $x_2 = 2$, abbiamo:

- primo prezzo: $\beta^1(8) = 8/2 = 4$, $\beta^1(2) = 2/2 = 1$ e quindi $\max\{4, 1\} = 4$ è il payoff per il venditore
- secondo prezzo: $\beta^2(8) = 8$, $\beta^2(2) = 2$ e quindi $\min\{8, 2\} = 2$ è il payoff per il venditore

▲

Quindi il RET (Revenue Equivalence Theorem) viene da una situazione non banale, nel senso che abbiamo due *diverse* v.a. che hanno lo stesso valore atteso.

Si può anche dimostrare che la varianza è maggiore nel caso dell'asta al secondo prezzo.

Pertanto un proprietario avverso al rischio, potendo farlo, sceglierà l'asta al primo prezzo.

1 Bibliografia

Due soli riferimenti:

Krishna, Vijay (2002): *Auction Theory*, Academic Press, San Diego (CA, USA).

Klemperer, Paul (2004): *Auctions: Theory and Practice*, Princeton University Press, Princeton (NJ, USA).

e un classico:

Vickrey, Wiliam (1961): *Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed tenders*, Journal of Finance, **16**, 8- 37.

Il contributo fondamentale di Vickrey sulle aste. In particolare, il "revenue equivalence theorem".