Equilibrio bayesiano perfetto. Giochi di segnalazione

Appunti a cura di
Stefano Moretti, Silvia VILLA e Fioravante PATRONE

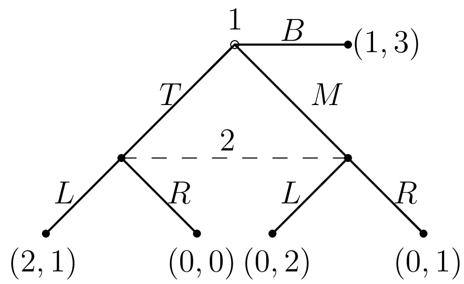
versione del 26 maggio 2006

Indice

1 Equilibrio bayesiano perfetto

L'equilibrio bayesiano perfetto è una semplificazione della nozione più generale di equilibrio sequenziale (Kreps-Wilson, 1982) che si adatta bene a classi particolari di giochi a informazione incompleta in forma estesa. L'impostazione seguita è quella del Gibbons.

Esempio 1 Consideriamo il seguente gioco in forma estesa:



e il gioco corrispondente in forma strategica (nel quale evidenziamo in grassetto le best reply dei due giocatori):

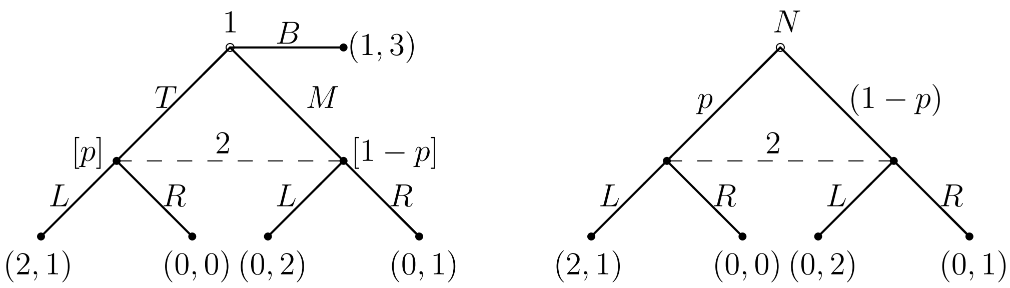
$I \backslash II$	L		R	
T	**2**	**1**	0	0
M	0	**2**	0	1
B	1	**3**	**1**	**3**

Notiamo che la coppia B, R è un equilibrio di Nash perfetto nei sottogiochi, ma prevede che il giocatore 2 giochi la strategia R, che è dominata da L indipendentemente dal nodo in cui 2 si trova.

Vogliamo imporre dei requisiti sulle strategie di equilibrio in modo da ottenere un raffinamento del concetto di equilibrio di Nash che non ammetta che situazioni come la precedente siano di equilibrio. L'idea è quindi quella di considerare come equilibrio non solo un profilo di strategie, ma di aggiungere a questo anche un profilo di credenze. Il primo requisito che imponiamo è quindi il seguente

R1) In ogni insieme di informazione il giocatore a cui spetta la mossa deve avere una credenza su quale nodo sia stato raggiunto nello svolgimento del gioco (cioè deve essere data una distribuzione di probabilità sui nodi dell'insieme di informazione).

Il secondo requisito che imponiamo traduce l'idea che all'equilibrio, la strategia di ciascun giocatore deve essere una miglior risposta alle strategie degli altri giocatori, in accordo con le sue credenze sui nodi raggiunti in ciascun insieme di informazione. Per esprimere precisamente questo requisito si deve considerare una generalizzazione del concetto di sottogioco: il gioco di continuazione. Mentre ciascun sottogioco deve partire da un insieme di informazione costituito da un un solo nodo, un gioco di continuazione può cominciare anche da un insieme di informazione con più di un elemento. Consideriamo di nuovo l'esempio 1 e supponiamo che la proprietà R1) sia verificata, e che quindi sia data una distribuzione di probabilità sui nodi dell'insieme informativo. Consideriamo quindi il gioco di continuazione che inizia dall'insieme informativo di pertinenza del giocatore 2. Questo gioco di continuazione è rappresentato qui sotto accanto al gioco precedente.



Le credenze del giocatore 2 sui nodi del suo insieme di informazione, che indichiamo tra parentesi quadre, vengono quindi utilizzate per costruire il gioco a destra, in cui si fa intervenire il caso rispettandole. La strategia scelta dal giocatore 2 in questo caso deve massimizzare la sua utilità attesa nel gioco a destra. Simili considerazioni potremmo farle considerando la forma strategica del gioco di continuazione che inizia dall'insieme informativo del giocatore 2, ovvero (il giocatore 1 non ha scelte da fare, e per indicare questo fatto mettiamo il simbolo "$*$" là dove normalmente vengono indicate le strategie a disposizione del giocatore 1):

$I \backslash II$	L	R
$*$	$2p \quad 2-p$	$0 \quad 1-p$

In generale richiediamo che un profilo di strategie e di credenze di equilibrio soddisfi

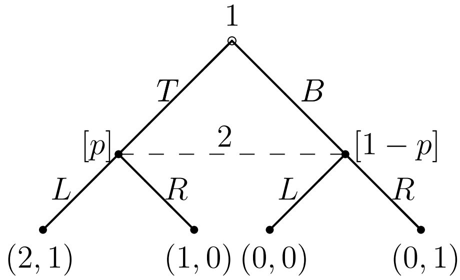
R2) La restrizione del profilo di strategie e di quello di credenze ad ogni gioco di continuazione deve essere un equilibrio di Nash nel gioco di continuazione.

Si noti che nell'Esempio 1, il profilo di strategie (B, R) non soddisfa il requisito 2 per nessun $p \in [0, 1]$. Infatti, come risulta evidente anche dalla forma strategica del gioco di continuazione che parte dall'insieme di informazione del giocatore 2, L è l'unico equilibrio di Nash in quel gioco di continuazione, qualunque sia p.

La proprietà **R2)** non deve trarre in inganno: richiedendo che la restrizione del profilo di strategie e di quello di credenze ad ogni gioco di continuazione sia un equilibrio di Nash, non va mai dimenticato che anche le credenze dei giocatori vanno considerate nella ricerca dell'equilibrio di Nash del gioco di continuazione. Quindi, essendo le credenze distribuzioni di probabilità sui nodi di ciascun insieme informativo, durante la ricerca della miglior risposta per ogni giocatore $i \in N$ fissate le strategie degli altri in $N \setminus \{i\}$, si ha a che fare con calcoli di utilità attesa date le credenze del giocatore i in ciascuno dei sui insiemi informativi all'interno del gioco di continuazione.

Questa ulteriore precisazione deve essere rimarcata, non solo per ricordare come devono essere cercati gli equilibri di Nash nei giochi di continuazione, ma anche per ricordare che le credenze sono elementi "fittizi" che hanno come obiettivo fornire un metodo per il raffinamento degli equilibri di Nash del gioco stesso. Consideriamo di nuovo il gioco nell'Esempio 1. Da parte sua, il gioco stesso non ha nessuna distribuzione di probabilità reale (ovvero posta dalla Natura) sui nodi degli insiemi informativi. Quindi è ragionevole aspettarsi che ci siano profili di strategie e credenze che pur soddisfacendo le condizioni **R1)** e **R2)** non siano equilibri di Nash del gioco stesso, come mostrato nel seguente esempio.

Esempio 2 Supponiamo di avere profilo di strategie e uno di credenze che soddisfano R1) e R2). Il profilo di strategie non è in generale un equilibrio di Nash, come mostra il gioco seguente



La forma strategica del gioco risulta essere

$I \backslash II$	L		R	
T	**2**	**1**	**1**	0
M	0	0	**0**	**1**

Considero il profilo $(T, R; p = 0)$. Questa terna soddisfa R1) e R2), ma la coppia (T, R) non è un equilibrio di Nash del gioco. Il punto è che le credenze del giocatore 2 non sono fondate, perché il giocatore 1 giocherà all'equilibrio certamente T, in quanto è una strategia fortemente dominante, ma il giocatore 2 assegna probabilità 0 al nodo che così sarebbe raggiunto.

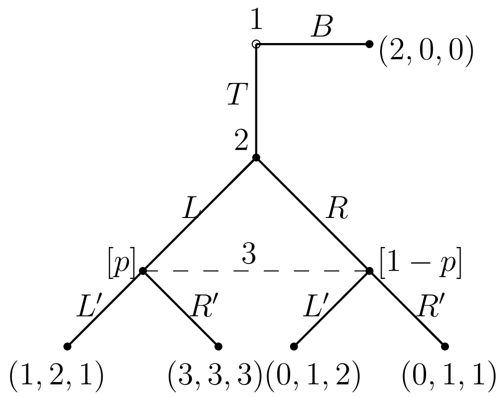
Per ovviare al problema descritto nell'Esempio 2, aggiungiamo un'ulteriore proprietà che deve essere soddisfatta.

Definizione 1 *Un insieme di informazione è sul sentiero di equilibrio se sarà raggiunto con probabilità positiva se il gioco viene giocato con le strategie di equilibrio.*

R3) Negli insiemi di informazione che si trovano sul sentiero di equilibrio le credenze sono determinate dalla regola di Bayes in accordo con le strategie di equilibrio.

Nell'Esempio 2, se all'equilibrio il giocatore 1 gioca T, allora deve essere $p = 1$.

Esempio 3



Notiamo inoltre che R1),R2) ed R3) non garantiscono nemmeno che un profilo di strategie sia un equilibrio perfetto nei sottogiochi. Nell'Esempio 3 consideriamo il sottogioco che comincia dal giocatore 2. Per tale sottogioco esiste un unico equilibrio di Nash, (L, R'), e l'unico equilibrio perfetto nei sottogiochi è quindi (T, L, R'). Se consideriamo il profilo $(T, L, R'; p = 1)$ questo soddisfa R1),R2),R3). Tuttavia anche il profilo $(B, L, L'; p = 0)$ soddisfa R1),R2) e R3), in quanto l'insieme di informazione del giocatore 3 non si trova sul sentiero di equilibrio poiché il giocatore 1 sceglie B. In questo caso pertanto R3) non impone alcuna restrizione sulla scelta di p. In particolare, anche se sembrerebbe "ragionevole" richiedere $p = 1$, poiché la scelta di L garantisce al giocatore 2 un risultato migliore in ogni caso, anche scegliendo $p = 0$ i requisiti R1),R2) e R3) sono soddisfatti.

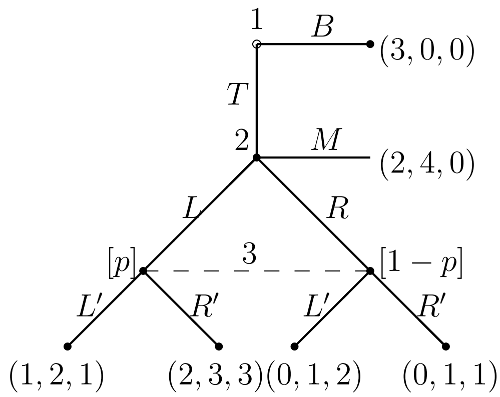
Per tale motivo introduciamo un'altra proprietà che richiederemo essere soddisfatta da un profilo di strategie all'equilibrio.

R4) Le credenze negli insiemi informativi fuori dal sentiero di equilibrio si devono determinare dalla strategia di equilibrio usando la regola di Bayes (dove ciò è possibile).

Definizione 2 *Un* **equilibrio bayesiano perfetto** *è un profilo di strategie e credenze che soddisfano i requisiti R1),R2),R3) e R4).*

Nell'Esempio 3, $(B, L, L'; p = 0)$ non soddisfa R4).

Esempio 4



All'equilibrio 1 sceglie B, 2 sceglie M. Quindi l'insieme di informazione del giocatore 3 non è raggiunto. E non c'è modo di determinare p perchè 2 sceglie M.

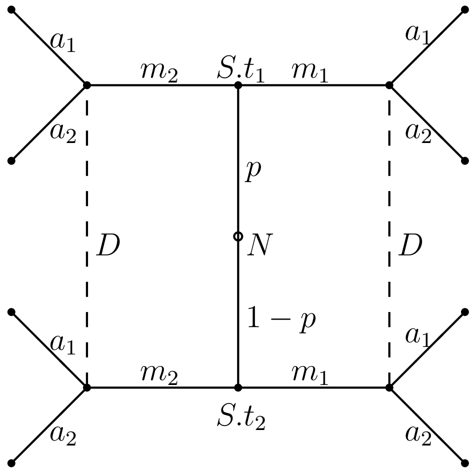
In realtà esistono ulteriori raffinamenti del concetto di equilibrio bayesiano perfetto che in questo caso prescriverebbero $p = 1$. Infatti, nel caso il nodo di informazione di pertinenza del giocatore 3 venisse raggiunto, il giocatore 2 non avrebbe scelto M. Ma tra L ed R dovrebbe scegliere L in quanto per lui questa è una strategia dominante.

2 Giochi di segnalazione

I giochi di segnalazione sono giochi in forma estesa a informazione incompleta. La struttura è la seguente:

- 2 giocatori: Mittente (S) e Destinatario (D);
- La Natura estrae il tipo del Mittente in $T = \{t_1, \dots, t_r\}$ con probabilità $p(t_i)$;
- Il Mittente osserva il tipo estratto e manda un messaggio m_j al Destinatario scelto in $M = \{m_1, \dots, m_l\}$;
- Il Destinatario osserva il messaggio m_j del Mittente e poi sceglie un'azione a_k in $A = \{a_1, \dots, a_m\}$;
- I payoff sono dati da $u_S(t_i, m_j, a_k,)$ per il Mittente e $u_D(t_i, m_j, a_k)$ per il Destinatario, cioè $u_S, u_d : T \times M \times A \to \mathbb{R}$.

Noi prendiamo in esame soltanto il caso in cui T, M, A siano insiemi finiti. Consideriamo il caso più semplice in cui $T = \{t_1, t_2\}$, $M = \{m_1, m_2\}$, e $A = \{a_1, a_2\}$. Allora possiamo rappresentare la situazione con il seguente diagramma



Le strategie pure di (S) (specificano cosa fa ogni tipo) sono quindi

$$(m_1, m_1), (m_1, m_2), (m_2, m_1), (m_2, m_2).$$

La prima componente della coppia specifica cosa fa t_1, la seconda cosa fa t_2. La prima e l'ultima si dicono strategie pooling, e le rimanenti si dicono separating. Le strategie di (D) invece specificano cosa fa (D) rispettivamente quando osserva m_1 o m_2, e sono:

$$(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_2).$$

Per definire l'equilibrio bayesiano perfetto per un gioco di segnalazione, è sufficiente interpretare R1),R2),R3) ed R4) in questo caso particolare.

R1) (S) ha informazione completa, quindi non è necessario introdurre credenze per lui.

(D): dopo aver osservato $m_j \in M$ deve avere una credenza su quale sia stato il tipo di mittente ad inviare il messaggio. Indichiamo tale credenza con il simbolo $p(t_i|m_j)$. Si deve avere:

$$p(t_i|m_j) \geq 0 \qquad \sum_{i=1}^{r} p(t_i|m_j) = 1 \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Un profilo $(m^*(t_1), \ldots, m^*(t_r); a^*(m_1), \ldots, a^*(m_l); p(\cdot|\cdot))$ è un equilibrio bayesiano perfetto se le seguenti proprietà sono soddisfatte:

R2) (D): $\forall m_j \in M$, l'azione $a^*(m_j)$ scelta dal Destinatario all'equilibrio massimizza la sua utilità attesa, date le sue credenze, ovvero

$$a^*(m_j) \in \text{argmax}_{a \in A} \sum_{t_i \in T} u_D(t_i, m_j, a) \cdot p(t_i|m_j).$$

(S): $\forall t_i \in T$ il messaggio scelto all'equilibrio massimizza l'utilità del Mittente, ovvero

$$m^*(t_i) \in \text{argmax}_{m \in M} u_S(t_i, m, a^*(m))$$

Data la strategia del mittente m^*, si indichi con T_j l'insieme dei tipi per cui $m^*(t_i) = m_j$. Se $T_j \neq \emptyset$ m_j viene giocato con probabilità positiva all'equilibrio.

R3) $\forall m_j \in M$ per cui $T_j \neq \emptyset$, le credenze di (D) sono determinate dalla regola di Bayes, cioè:

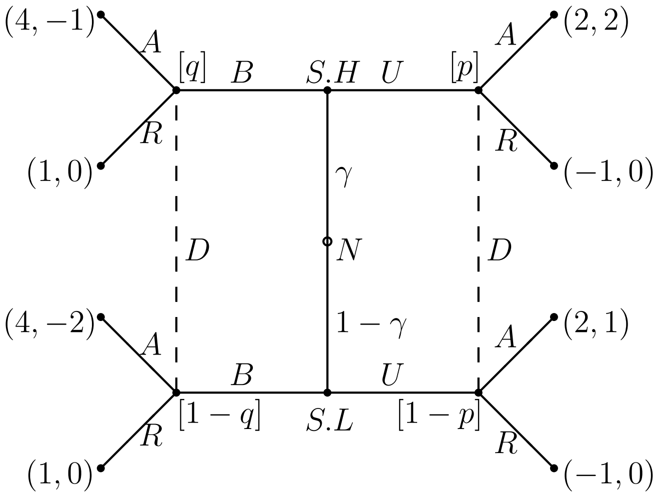
$$p(t_i|m_j) = \frac{p(t_i)}{\sum_{t_i \in T_j} p(t_i)}.$$

R4) E' sempre soddisfatto, in quanto è conseguenza in questo caso di R3).

Esempio 5 Semplificazione estrema del modello di Spence- Supponiamo ad esempio che il Mittente sia un candidato per un lavoro e che il Destinatario sia un'impresa che potrebbe potenzialmente assumerlo. Il candidato può essere di due tipi: di alto livello (H) con probabilità γ o di basso livellllo (L) con probabilità $1-\gamma$ (quindi $T = \{H, L\}$. In ognuno dei due casi il messaggio che il candidato invia è il suo livello di istruzione: laurea (U) o diploma (B). Quindi $M = \{U, B\}$.

L'impresa osserva il messaggio, ma non il tipo, e decide se assumere (A) o respingere (R) il candidato. Perciò $A = \{A, R\}$.

Possiamo rappresentare questo gioco a informazione incompleta con l'albero sottostante:



Interpretiamo gli esiti del gioco: in ogni coppia ordinata il primo numero rappresenta l'utilità del candidato, mentre il secondo quello dell'impresa. Se l'impresa non assume supponiamo quindi che il suo payoff sia 0, indipendentemente dal messaggio ricevuto e dal tipo del mittente. Altrimenti, i payoff riflettono le seguenti preferenze dell'impresa: persona di alto livello, laureata è preferita dall'impresa ad una di basso livello laureata, che è preferita ad una di alto livello, diplomata, che è infine preferita ad una di basso livello, diplomata.

Per quel che riguarda il candidato, indipendentemente dal tipo ecco la lista ordinata secondo le sue preferenze delle diverse situazioni possibili: essere assunto solo con il diploma; essere assunto ed avere la laurea; non essere assunto ed essere soltanto diplomato; avere una laurea e non essere assunto.

Cerchiamo un equilibrio bayesiano perfetto per questo gioco. R1) è soddisfatto, e infatti abbiamo indicato le credenze dell'impresa sul tipo del candidato tra parentesi quadre. Un profilo di strategie e credenze sarà quindi una sestupla del tipo $(m', m''; a', a''; p, q)$ dove m' è il messaggio che manda $S.H$, m'' è il messaggio che manda $S.L$, a' è quello che fa l'impresa se osserva U, a'' è quello che fa l'impresa se osserva B, e p, q sono le credenze sui tipi dei giocatori che ha l'impresa se osserva rispettivamente U o B.

Consideriamo il profilo $(U, U; A, R; \gamma, q)$, con $q \in [0, 1]$ e dimostriamo che è un equilibrio bayesiano perfetto indipendentemente da q.

Dobbiamo provare che al Mittente non conviene deviare, fissata la strategia del Destinatario (A, R). Analizziamo prima $S.H$: se gioca U la sua utilità è $u_S(H; U, \cdot; A, R) = 2$, se gioca B è $u_S(H; B, \cdot; A, R) = 1$, perciò Uè una miglior risposta alla strategia del Destinatario per il tipo (H), La situazioneè la stessa per quel che riguarda il tipo (L), pertanto R2) è soddisfatto per quanto riguarda il Mittente.

Per il Destinatarioè necessario calcolare l'utilità attesa, in base alle credenze che abbiamo scelto. Utilità attesa se gioca $(A, \cdot)$:

$$\gamma u_D(H; U, U; A, \cdot) + (1 - \gamma) u_D(L; U, U; A, \cdot) = 1 + \gamma$$

Utilità attesa se gioca $(R, \cdot)$:

$$\gamma u_D(H; U, U; R, \cdot) + (1 - \gamma) u_D(L; U, U; R, \cdot) = 0.$$

Inoltre, se osservasse B, la sua utilità attesa se giocasse $(\cdot, R)$ sarebbe 0, mentre se giocasse $(\cdot, A)$ sarebbe $q - 2$.

Poiché $1 + \gamma > 0$ e $q - 2 < 0$, il requisito R2) è soddisfatto anche per il destinatario.

Per quel che riguarda R3), si ha $T_U = T$ e $T_B = \emptyset$. Le credenze allora restano quelle a priori, in quanto non ci sono nuovi elementi per decidere.