QUADRO CONCETTUALE

	Decisioni in condizioni di certezza	Decisioni in condizioni di rischio	Decisioni in condizioni di incertezza	Decisioni interattive (giochi non coop. in forma strategica)	Decisioni collettive (ottimizzazione paretiana)
Dati	X : Azioni disponibili E : Eventi finali certi	X : Azioni disponibili E : Eventi finali certi	X : Azioni disponibili E : Eventi finali certi S : Stati di natura	X, Y : Azioni disponibili per I e II E : Eventi finali certi	Z: Azioni disponibili (può essere $Z = X \times Y$) E : Eventi finali certi
Risultati	$h : X \longrightarrow E$ $x \rightsquigarrow e \in E$ (azione $\rightsquigarrow$ evento certo)	$h : X \longrightarrow \Delta(E)$ $x \rightsquigarrow L \in \Delta(E)$ (azione $\rightsquigarrow$ una lotteria su eventi)	$h : X \longrightarrow K$ $x \rightsquigarrow [k : S \longrightarrow E]$ (azione $\rightsquigarrow$ legge che mappa ogni stato di natura in un evento)	$h : X \times Y \longrightarrow E$ $x, y \rightsquigarrow e \in E$	$h : Z \longrightarrow E$ $z \rightsquigarrow e \in E$
Preferenze	$\sqsupseteq$ su E preord. totale	$\sqsupseteq$ su $\Delta(E)$ preord. totale che soddisfa assioma di vNM	$\sqsupseteq$ su $K = \{k : S \longrightarrow E\}$ preord. totale che soddisfa assioma di Savage	$\sqsupseteq_I$ e $\sqsupseteq_{II}$ su E Nota: se necessario, su $\Delta(E)$, di vNM	$\sqsupseteq_I$ e $\sqsupseteq_{II}$ su E Nota (*)
Preferenze indotte	$\succeq$ su X $x' \succeq x''$ $\Leftrightarrow$ $h(x') \sqsupseteq h(x'')$	$\succeq$ su X $x' \succeq x''$ $\Leftrightarrow$ $h(x') \sqsupseteq h(x'')$	$\succeq$ su X $x' \succeq x''$ $\Leftrightarrow$ $h(x') \sqsupseteq h(x'')$	$\succeq_I$ e $\succeq_{II}$ su $X \times Y$ $(x', y') \succeq_I (x'', y'')$ $\Leftrightarrow$ $h(x', y') \sqsupseteq_I h(x'', y'')$ analogamente per $\succeq_{II}$	$\succeq$ su Z $z' \succeq z''$ $\Leftrightarrow$ $h(z') \sqsupseteq_I h(z'')$ e $h(z') \sqsupseteq_{II} h(z'')$
Utilità	$u : E \longrightarrow \mathbb{R}$ (ordinale)	$u : E \longrightarrow \mathbb{R}$ (cardinale) utilità di vNM	$u : E \longrightarrow \mathbb{R}$ (cardinale) serve anche $p \in \Delta(S)$	$u, v : E \longrightarrow \mathbb{R}$ Nota: se necessario, u, v di vNM	$U : E \longrightarrow \mathbb{R}^2$ Nota (****)
Utilità indotte	$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ $f = u \circ h$	$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ $f = \tilde{u} \circ h$ (**)	$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ $f = \hat{u} \circ h$ (***)	$f, g : X \times Y \to \mathbb{R}$ $f = u \circ h$ $g = v \circ h$	$F : Z \to \mathbb{R}^2$ $F = U \circ h$

(*) $\sqsupseteq_I$ e $\sqsupseteq_{II}$ possono essere preordini totali che denotano preferenze di due decisori diversi, oppure due preordini di uno stesso decisore che non può/vuole sintetizzarli in unico preordine totale

(**) $\tilde{u} : \Delta(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ è così definita: $\tilde{u}(L) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot u(e_i)$, essendo L la lotteria che assegna probabilità p_i ad e_i;
$f(x) = \tilde{u}(h(x))$; dato $\bar{x} \in X$, se $h(\bar{x})$ è la lotteria che assegna probabilità $\bar{p}_i$ ad e_i, è $f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i \cdot u(e_i)$

(***) $\hat{u} : K \longrightarrow \mathbb{R}$ è così definita: $\hat{u}(k) = \sum_{i=1}^{n} p(s_i) \cdot u(k(s_i))$;
$f(x) = \hat{u}(h(x))$; dato $\bar{x} \in X$, se $h(\bar{x})$ è la mappa $\bar{k}$ per cui $\bar{k}(s_i) = \bar{e}_i$, è $f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} p(s_i) \cdot u(\bar{k}(s_i)) = \sum_{i=1}^{n} p(s_i) \cdot u(\bar{e}_i)$

(****) U "rappresenta" $\succeq$ su Z nel senso che $z_1 \succeq z_2 \Leftrightarrow U(z_1) \geq U(z_2)$. Si noti che qui $\geq$ indica l'ordine (non totale) su $\mathbb{R}^2$ così definito: $(x_1, y_1) \geq (x_2, y_2) \Leftrightarrow [(x_1 \geq x_2)$ e $(y_1 \geq y_2)]$

Note aggiuntive

LOTTERIE INDOTTE DA p su S. Una lotteria L è data da p su E. Indichiamo con p_i la prob che p assegna a x_i, cioè $p_i = p(x_i)$.
Nel contesto delle decisioni in condizioni di incertezza, data p su S, una azione $x \in X$ identifica una lotteria su E. Abbiamo: $p(x_i) = p(\{s \in S : k(s) = x_i\})$. Dove $k = h(x)$.

UTILITA' ORDINALE
Abbiamo $\tilde{u} : \Delta(E) \longrightarrow \mathbb{R}$. Si noti che questa $\tilde{u}$ di fatto è una funzione di utilità "ordinale" che rappresenta le preferenze $\sqsubseteq$ su $\Delta(E)$. Si noti che la $\sqsubseteq$ è un preordine totale, quindi con poche condizioni ulteriori (tipo la continuità, sarà rappresesntabile ad esempio con una funzione di utilità continua.
E vogliamo che $\tilde{u}$ sia:
- esprimibile mediante una $u : E \longrightarrow \mathbb{R}$
- questa esprimibilità vogliamo sia di tipo lineare

Questi sono i requisiti del teorema di vNM

Analogo discorso per la $\hat{u}$, in condizioni di incertezza. La vogliamo rappresentare mediante la solita u e le prob soggettive.