

1 Choice Function, preordine totale: equivalenza degli approcci (Houthakker).

Indicherò con $\mathcal{P}_{\blacksquare}(X)$ l'insieme delle parti NON VUOTE di X . Cioè l'insieme di tutti i sottoinsiemi non vuoti di X .

Una *choice function* (su X) è:

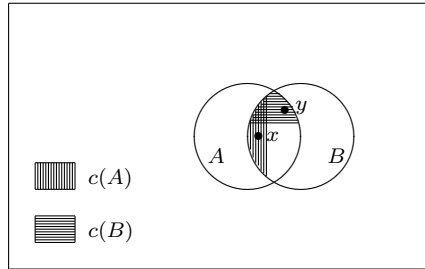
$c : \mathcal{P}_{\blacksquare}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ tale che $c(A) \subseteq A \quad \forall A \in \mathcal{P}_{\blacksquare}(X)$.

Imponiamo che c soddisfi le seguenti due condizioni:

- 1) $c(A) \neq \emptyset \quad \forall A \in \mathcal{P}_{\blacksquare}(X)$.
- 2) [Houthakker]: $\forall x, y \in A \cap B$:
 $[x \in c(A) \text{ e } y \in c(B)] \Rightarrow x \in c(B)$.

Si noti che, se la condizione 2) è soddisfatta, ne segue che è anche vero:
 $([x \in c(A) \text{ e } y \in c(B)] \Rightarrow [x \in c(B) \text{ e } y \in c(A)])$.

Vediamo un esempio in cui la condizione di Houthakker è violata:



$$x \in c(A), y \in c(B) \not\Rightarrow y \in c(A), x \in c(B)$$

Una prima, importante conseguenza della condizione 2) è che le preferenze di un individuo, deducibili a partire dalle scelte che effettua, sono determinate dalle sue scelte su insiemi contenenti solo due elementi.

Vediamo in dettaglio e formalmente questo fatto.

Cominciamo col definire le preferenze “dedotte” da c .

Definizione 1.1 Data $c : \mathcal{P}_{\blacksquare}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$, *choice function*, definiamo:

$$x \succ_c y : \Leftrightarrow [\forall A \subseteq X \text{ t.c. } x, y \in A, y \notin c(A)].$$

Si noti che, senza supporre alcuna restrizione sulla *choice function*, la relazione che otteniamo può essere molto “irregolare”.

Esempio 1.1 Sia $X = \{1, 2, 3\}$ e sia $c(A) = \emptyset \quad \forall A \in \mathcal{P}_{\blacksquare}(X)$.

Allora $x \succ_c y$ sempre, qualunque siano $x, y \in X$.

In particolare, $x \succ_c x \quad \forall x \in X$.

Ovviamente la stranezza è dovuta al fatto che, essendo c a valori vuoti, le premesse nella implicazione che è nella definizione non è mai vera. E quindi l'implicazione lo è....

Esempio 1.2 Sia $X = \{1, 2, 3\}$ e sia $c(\{x\}) = \{x\} \quad \forall x \in X$;
 $c(\{1, 2\}) = \{1\}$, $c(\{2, 3\}) = \{2\}$, $c(\{3, 1\}) = \{3\}$; $c(X) = \emptyset$.
 Allora è $1 \succ_c 2$, $2 \succ_c 3$, $3 \succ_c 1$. Una vecchia conoscenza, non transitiva...

Se invece assumiamo che valgano le condizioni 1), 2), abbiamo tanto per cominciare il seguente risultato (molto importante!):

Teorema 1.1 Dato X ed una choice function c soddisfacente 1), 2) si ha che :

$$x \succ_c y \Leftrightarrow c(\{x, y\}) = \{x\}.$$

Dimostrazione.

\Rightarrow) Visto che $c(\{x, y\}) \neq \emptyset$, e visto che $y \notin c(A)$ (in quanto $x \in c(A)$), c 'è poca scelta...

\Leftarrow) Supponiamo di sapere che $c(\{x, y\}) = \{x\}$. E cerchiamo di dedurre che per ogni A tale che $x, y \in A$, $y \notin c(A)$. Supponiamo per assurdo che $y \in c(A)$.

Detto $B = \{x, y\}$ e $y \in c(A)$, ne segue che deve essere $y \in c(B)$.

Così $y \in c(\{x, y\})$. Contro l'ipotesi fatta.

Non credo sia il caso di spendere troppe parole: l'utilità di questo teorema dovrebbe essere evidente.

Vediamo ora di dimostrare che \succ_c è asimmetrica e negativamente transitiva. Grazie al teorema, la asimmetria è ovvia.

Dimostriamo che è negativamente transitiva. Supponiamo $x \succ_c y$.

Dobbiamo garantire che vale $x \succ_c z \vee z \succ_c y \quad \forall z \in X$.

Per definizione, essendo $x \in A$, non può essere $y \in c(A)$.

Allora $c(A) \subseteq \{x, z\}$. Vediamo i tre casi possibili:

I) $c(\{x, y, z\}) = \{x\}$.

Consideriamo $A = \{x, y, z\}$ e $B = \{x, z\}$.

Se fosse $z \in c(B)$, si avrebbe (per Houthakker):

$x \in c(A)$ e $z \in c(B)$ e quindi $z \in c(A)$. Falso.

Allora $z \notin c(B)$. Quindi $c(B) = \{x\}$. E pertanto (grazie al teorema) $x \succ_c z$.

II) $c(\{x, y, z\}) = \{z\}$.

Consideriamo $A = \{x, y, z\}$ e $B = \{y, z\}$.

Se fosse $y \in c(B)$, si avrebbe (per Houthakker):

$z \in c(A)$ e $y \in c(B)$ e quindi $y \in c(A)$. Falso.

Allora $y \notin c(B)$. Quindi $c(B) = \{z\}$. E pertanto (grazie al teorema) $z \succ_c y$.

III) $c(\{x, y, z\}) = \{x, z\}$.

Consideriamo $A = \{x, y, z\}$ e $B = \{y, z\}$.

Se fosse $y \in c(B)$, si avrebbe (per Houthakker):

$z \in c(A)$ e $y \in c(B)$ e quindi $y \in c(A)$. Falso.

Allora $y \notin c(B)$. Quindi $c(B) = \{z\}$. E pertanto (grazie al teorema) $z \succ_c y$.

Quindi abbiamo che c induce una relazione \succ_c che è asimmetrica e negativamente transitiva.

Ricordo che da una relazione \succ asimmetrica e negativamente transitiva, possiamo definire una choice function c_\succ così:

$$c_\succ(A) = \{x \in A : \nexists y \in A \text{ t.c. } y \succ x\}.$$

Ovviamente la choice function la possiamo definire per una qualsiasi relazione p su X . Ma la asimmetria e la negativa transitività ci assicurano che la choice function abbia proprietà ragionevoli (in particolare la 1) e 2)). Purché X sia finito.

Esercizio 1.1 Se X è un insieme finito e \succ è asimmetrica e negativamente transitiva, dimostrare che c_\succ è a valori non vuoti e che soddisfa le condizioni di Houthakker.

A questo punto sarebbe interessante dimostrare che:

$$c_{\succ_c} = c \text{ !! E che } \succ_{c_\succ} = \succ.$$

Esercizio 1.2 Dimostrare che $c_{\succ_c} = c$ e che $\succ_{c_\succ} = \succ$.

(Suggerimento: $c_{\succ_c}(A) = \{x \in A : \nexists y \in A \text{ t.c. } y \succ_c x\}$. Allora:

$$c_{\succ_c}(A) = \{x \in A : \forall y \in A, [c(\{x, y\}) = \{x\} \vee c(\{x, y\}) = \{x, y\}]\dots\}.$$

Esercizio 1.3 Perché, data c , non è saggio definire \succ_c nel modo seguente?
 $x \succ_c y \Leftrightarrow \forall A \subseteq X \text{ t.c. } x, y \in A, x \in c(A) \text{ e } y \notin c(A)$.

Esercizio 1.4 E perché non è saggio neppure questo?

$$x \succ_c y \Leftrightarrow \forall A \subseteq X \text{ t.c. } x, y \in A, x \in c(A) \Rightarrow y \notin c(A).$$

Un approccio analogo, ma non identico, lo si può trovare su Fishburn (esercizio 14, pag. 24). Il lettore particolarmente interessato potrebbe fare il confronto tra i due metodi. Visto che l'esercizio di Fishburn fa riferimento ad un lavoro di Arrow, può essere utile consultare:

Arrow, Kenneth J. : "Rational choice function and orderings", *Economica*, vol. 26, pp. 121-127, 1959.