Ottimizzazione vettoriale

Più criteri
Ordine parziale, elementi massimali

Vedi "quadro concettuale". Schema con X, h, E e poi *due* sistemi di preferenze su E, o, se si vuole, due funzioni di utilità definite su E ed a valori in $\mathbb{R}$.
Vedi gli appunti di Moretti per la definizione di $\leq$ su $\mathbb{R}^2$ (e di $<$ e $<<$) ed anche per la interpretazione geometrica (per avere $x \geq y$ la x deve stare nel quadrante che ha y come origine).

Massimo per una funzione a valori reali $f : X \to \mathbb{R}$. Il punto di partenza del discorso è il max di $f(X)$, che è s.i. di $\mathbb{R}$ che "eredita" (termine tecnico) l'ordine di $\mathbb{R}$.
Massimo di f non è altro che il max di $f(X)$. Cioè è $\bar{t} \in f(X)$ t.c. $\bar{t} \geq t \quad \forall t \in f(X)$.
Se $\bar{t}$ è massimo per f, dirò che $\bar{x} \in X$ è *punto di massimo* per f se $f(\bar{x}) = \bar{t}$. Si osservi che $\bar{x} \in X$ è punto di massimo per f se e solo se $f(\bar{x}) \geq f(x) \quad \forall x \in X$.

Esercizio 1 Dimostrare che il massimo per f, se esiste, è unico.

Esercizio 2 Esibire un esempio di un preordine ch enon ha un unico massimo.

Ricordo che, dato A con ordine $\succeq$ e preso B con $B \subseteq A$ (B "eredita" l'ordine dato su A), $\bar{t} \in B$ è massimo per $\succeq$ su B se $\bar{t} \succeq t \quad \forall t \in B$.

Siano date $f, g : X \to \mathbb{R}$ ovvero $F : X \to \mathbb{R}^2$ ($F = (f, g)$). Prendo $F(X)$ e cerco max? Posso farlo, ma normalmente resterò deluso. Devo accontentarmi di meno. Cerco elemento massimale di $F(X)$.

Cioè, dato A con ordine $\succeq$ e preso B con $B \subseteq A$, $\bar{t} \in B$ è massimale per $\succeq$ su B se $\bar{t} \succeq t \quad \forall t \in B$ che sia *confrontabile* con $\bar{t}$.

Se sono date $f, g : X \to \mathbb{R}$, ovvero $F : X \to \mathbb{R}^2$ ($F = (f, g)$), cercherò un elemento massimale per $F(X)$ e dirò che è un *ottimo paretiano* per F. Invece, dirò che un punto $\bar{x} \in X$ è un *punto di ottimo paretiano* se $F(\bar{x})$ è un ottimo paretiano per $F(X)$.

Dire che un punto $\bar{t}$ è massimale è come dire che non c'è altro punto che "stia meglio di lui". Cioè, non esiste alcun $t \in B$ t.c. $t \succeq \bar{t}$, eccettuato $\bar{t}$ stesso.
Attenzione! Questa equivalenza vale se $\succeq$ è un ORDINE. Non vale se fosse un preordine.

Esercizio 3 Mostrare un esempio con un preordine per il quale l'equivalenza non è vera.

Se siamo in $B \subseteq \mathbb{R}^2$ (ma il discorso, oltre che ad $\mathbb{R}^n$ può essere esteso oltre), possiamo dirlo come che non vi sia $t \in B$ t.c. $t > \bar{t}$.
Abbiamo così nuovo modo di definire un ottimo paretiano.
Non solo, possiamo anche introdurre idea di ottimo paretiano debole: non esiste $t \in B$ t.c. $t \gg \bar{t}$.

Scalarizzazione.

Per trovare ottimi paretiani o punti di ottimo paretiano, si può provare a ricondursi al caso di funzioni a valori reali. L'idea è quella di scalarizzare il problema (data F, possiamo interpretare quello che stiamo facendo come considerare una media pesata di f e g).

Questo metodo lo possiamo utilizzare sia per tovare un ottimo paretiano per un sottoinsieme B di $\mathbb{R}^2$, che per cercare punti di ottimo paretiano ed ottimi paretiani per $F : X \to \mathbb{R}^2$.

Vediamo il caso in cui siamo interessati a trovare un ottimo paretiano per $B \subseteq \mathbb{R}^2$.

Prendiamo (λ, μ), con $\lambda, \mu \geq 0$ e con $\lambda + \mu = 1$.

Cerchiamo un punto di massimo per $(u, v) \mapsto \lambda u + \mu v$ su B.

Il punto di max del problema scalarizzato è un ottimo paretiano (stretto se i coefficienti sono entrambi positivi; debole se qualche coefficiente si può annullare (non tutti)). La dimostrazione è immediata.

Dato un problema di ottimizzazione vettoriale, si cerca il max di $\lambda f(x) + \mu g(x)$. Che ci dà un ottimo paretiano per F. Ovvero un punto di max per $\lambda f(x) + \mu g(x)$, che ci dà un punto di ottimo paretiano per F.

NON TUTTI gli ottimi paretiano si possono trovare per scalarizzazione.

Se però abbiamo che $B \subseteq \mathbb{R}^2$ è un insieme CONVESSO, possiamo dimostrare che tutti i suoi punti di ottimo paretiano debole si possono ottenere per scalarizzazione.

Serve il:

Teorema 1 (Teorema di separazione di Minkowski) *Dati V, W sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ convessi, non vuoti e disgiunti, allora esiste un iperpiano che li separa. Cioè esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, non tutti nulli, tali che:*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i \qquad \forall v \in V \quad \forall w \in W$$

Sia allora $B \subseteq \mathbb{R}^2$ (ci mettiamo in dimensione 2, ma il discorso è identico in dimensione n).

Dalla definizione di ottimo paretiano debole, si ottiene subito che $\bar{t} \in B$ è un ottimo paretiano debole se e solo se $B \cap (\bar{t} + \mathbb{R}^2_{>>}) = \emptyset$.

Supponiamo che B sia *convesso.* Possiamo allora usare il teorema di Minkowski. Sia $\bar{t} = (\bar{u}, \bar{v})$ ottimo paretiano per B.

Allora, esiste iperpiano che separa B e $\bar{t} + \mathbb{R}^2_{>>}$. Cioè esistono λ, μ, non entrambi nulli, tali che:

$$\lambda u_1 + \mu v_1 \geq \lambda u_2 + \mu v_2 \qquad \forall (u_1, v_1) \in \bar{t} + \mathbb{R}^2_{>>} \quad \forall (u_2, v_2) \in B$$

Cioè (prendendo: $(u_1, v_1) = (\bar{u}, \bar{v}) + (a, b)$ e chiamando $(u, v) = (u_2, v_2)$):

$$\lambda \bar{u} + \mu \bar{v} + \lambda a + \mu b \geq \lambda u + \mu v \qquad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2_{>>} \quad \forall (u, v) \in B$$

Osserviamo subito che $\lambda, \mu \geq 0$. Supponiamo di no. Sia quindi (ad esempio) $\lambda < 0$. Basta prendere a sufficientemente grande per violare la disequazione.

A questo punto, basta normalizzare (cioè dividere per $\lambda + \mu$) per soddisfare la condizione che la somma dei coefficienti faccia 1.

Non resta altro che un passaggio la limite per ottenere la tesi. Teniamo fisso $(u, v) \in B$ e facciamo tendere a e b a zero nell'ultima disequazione. Otteniamo:

$$\lambda \bar{u} + \mu \bar{v} + \geq \lambda u + \mu v \qquad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2_{>>} \quad \forall (u, v) \in B$$

Ovvero, $(\bar{u}, \bar{v})$ rende massima la funzione $(u, v) \mapsto \lambda u + \mu v$ su B.

Per passare al caso in cui cerchiamo ottimi paretiani (o punti di ottimo paretiano) deboli per F, possiamo utilizzare i fatti seguenti:

- supponiamo $X \subseteq \mathbb{R}^k$, X convesso e non vuoto
- supponiamo che f e g siano concave

Queste ipotesi non sono sufficienti per dimostrare che $F(X)$ è convesso, ma si riesce a dimostrare che $F(X) - \mathbb{R}^2_{\geq}$ è convesso.

Si dimostra inoltre facilmente che, in generale (cioè, per ogni sottoinsieme B di $\mathbb{R}^2$), $B \cap (\bar{t} + \mathbb{R}^2_{>>}) = \emptyset$ se e solo se $(B - \mathbb{R}^2_{\geq}) \cap (\bar{t} + \mathbb{R}^2_{>>}) = \emptyset$.

Si riesce così ad ottenere il teorema di scalarizzazione per F. Naturalmente, avremo a che fare con $(f(x), g(x))$ anziché con (u, v) e con $\bar{t} = (f(\bar{x}), g(\bar{x}))$ anziché con $\bar{t} = (\bar{u}, \bar{v})$, dove $\bar{x}$ è un punto di ottimo paretiano debole per F.

Infatti è:
$\bar{x}$ è un punto di ottimo paretiano debole per F su X
se e solo se
$\bar{t} = (\bar{u}, \bar{v}) = F(\bar{x})$ è ottimo paretiano debole per $F(X)$
se e solo se
$\bar{t} = (\bar{u}, \bar{v}) = F(\bar{x})$ è ottimo paretiano debole per $F(X) - \mathbb{R}^2_{\geq}$
pertanto:
esistono $\lambda, \mu \geq 0$, non entrambi nulli, tali che $\lambda\bar{u} + \mu\bar{v} \geq \lambda u + \mu v \qquad \forall (u, v) \in F(X) - \mathbb{R}^2_{\geq}$

Per questi λ, μ si ha quindi:
$\lambda f(\bar{x}) + \mu g(\bar{x}) \geq \lambda u + \mu v \qquad \forall (u, v) \in F(X) - \mathbb{R}^2_{\geq}$
e quindi, in particolare:
$\lambda f(\bar{x}) + \mu g(\bar{x}) \geq \lambda u + \mu v \qquad \forall (u, v) \in F(X)$
ovvero:
$\lambda f(\bar{x}) + \mu g(\bar{x}) \geq \lambda f(x) + \mu g(x) \qquad \forall x \in X$

Pertanto, possiamo affermare che $\bar{x}$ è punto di massimo per $x \mapsto \lambda f(x) + \mu g(x)$

OSSERVAZIONE 1: la regola di pareto è ordinale, cioè dipende solo dalle preferenze!!!

OSSERVAZIONE 2: I problemi di ottimizzazione "vettoriale" possono originare da due motivi: più criteri che un decisore non riesce a consolidare in uno solo, oppure presenza di più decisori.