1 Decisioni in condizioni di certezza

A volte possiamo essere abbastanza sicuri che i nostri atti avranno certi risultati. Se siamo in un bar e ordiniamo un bicchiere d'acqua come nostra unica bevanda, allora, a parte scherzi stupidi e comportamenti scoordinati e maldestri, quella è la bevanda che porteremo al nostro tavolo. D'altra parte, a volte possiamo sapere solo che la nostra scelta avrà un dato risultato solo con una certa probabilità. Per esempio, se scommettiamo di fare dieci in un lancio di una coppia di dadi non truccati, non possiamo essere sicuri di vincere, ma possiamo sapere che le nostre possibilità sono una su dodici. Infine, a volte possiamo non avere alcuna concreta idea a proposito della relazione tra un atto che possiamo scegliere e un possibile risultato. Se una ragazza ha la possibilità di dare un appuntamento a un potenziale marito, un esito possibile è che quella coppia un giorno poserà per una foto con i bis-nipoti. Ma, al momento, sembrerebbe impossibile per la ragazza valutare la probabilità di quell'avvenimento se concede l'appuntamento.

Se stiamo prendendo una decisione nella quale possiamo essere certi che tutti i nostri atti sono come nel primo esempio, i teorici delle decisioni definiscono la nostra scelta *decisione in condizioni di certezza*. Nel secondo e terzo esempio, invece, ci si riferisce, rispettivamente, a condizioni di *rischio* (probabilità sugli esiti nota a priori) e *incertezza* (probabilità sugli esiti non nota a priori). In queste note noi ci occuperemo esclusivamente delle condizioni di certezza. In quest'ambito, tutto ciò che si deve fare è determinare quale esito si preferisce, dal momento che si sa quale atto (o atti) lo produrrà certamente. A prima vista può sembrare molto riduttivo limitarsi a tali situazioni tutto sommato semplici, come l'ordinazione di una bevanda al bar. In realtà non è sempre così facile: si supponga per esempio di programmare un viaggio in auto da Genova a Parigi. Sicuramente avremmo a disposizione più di un tragitto possibile, ma ciascuno sarebbe differente da un altro per chilometraggio, condizioni di guida, traffico, possibilità di cattivo tempo e paesaggio. Anche supponendo che tutto ciò che riguarda queste condizioni sia certo, quale strada sceglieremmo? Non credo ci sia bisogno di andare oltre con gli esempi: ciascuno di noi, ogni giorno si trova a dover prendere decisioni difficili ancor quando tutti gli esiti possibili siano certi.

Dal momento che vogliamo introdurre un linguaggio di riferimento per quello che concerne il caso delle decisioni in condizioni di certezza è utile tenere a mente come modello base una situazione molto semplice, per esempio il caso in cui si abbia da scegliere un frutto da un dato cesto che contiene mele, arance e pere. Come si evincerà meglio in seguito, può tornare utile rappresentare il modello in forma tabellare come in Tabella 1.

Così si ha da scegliere un frutto dal cesto. Quale si ha intenzione di

alternative disponibili	*esiti*
mela	consumare una mela
arancia	consumare un'arancia
pera	consumare una pera

Tabella 1: Scelta del frutto.

scegliere? E più importante: da dove vengono i principali dati che si usano per fare la scelta?

Scopo di questo capitolo sarà quello di introdurre gli elementi formali fondamentali del modello. Il prossimo capitolo, invece, si focalizzerà più sulle proprietà che tali elementi devono soddisfare.
Ci sono tre determinanti fondamentali:

- le alternative disponibili e gli esiti (o conseguenze) che ne conseguono;
- i propri gusti (le preferenze);
- il criterio di scelta.

Partiamo con la descrizione della relazione tra le alternative a disposizione del decisore e gli esiti che si hanno in corrispondenza delle scelte da lui operate.
Formalmente, abbiamo: (X, E, h). Con X indichiamo l'insieme delle alternative disponibili a disposizione del decisore, mentre E rappresenta l'insieme dei possibili esiti derivanti dalle scelte del decisore. Infine, la funzione $h : X \to E$ ci dice come le scelte operate dal decisore si traducono in esiti.

Non crediate che l'idea di "conseguenza" sia un'idea semplice. L'identificazione di cosa sia una conseguenza non è per nulla semplice. Quando si considera di mangiare un frutto, quale è la "vera" conseguenza alla quale si è interessati? Il piacere di mangiarlo, il suo gusto? O le calorie che fornisce? O si considera che mangiare frutta regolarmente sia un'abitudine salutare? Ecc... Abbastanza spesso, quando si considerano le conseguenze, è facile entrare in una specie di regressione (forse, molto lunga, se non "infinita"). Non focalizzeremo la nostra attenzione su questo. Ma uno deve essere consapevole del fatto che, dipendentemente da come viene descritto il problema, cosa si considera come conseguenza delle nostre azioni può essere molto differente. Nel nostro esempio, è $X = \{\text{mela}, \text{arancia}, \text{pera}\}$ mentre l'insieme E è semplicemente {"consumare una mela", "consumare un'arancia", "consumare una pera"}; infine, la funzione h la ricaviamo dalla Tabella 1. Ad esempio, $h(\text{mela}) =$ "consumare una mela″. Per ora, abbiamo visto

alternative disponibili	*esiti*	
mela	"consumare una mela"	$\curvearrowright$
	$\downarrow$	$\downarrow$
arancia	"consumare un'arancia"	$\downarrow$
	$\downarrow$	$\downarrow$
pera	"consumare una pera"	$\hookleftarrow$

Tabella 2: Scelta del frutto e preferenze rappresentate con "espediente grafico".

come descrivere in termini formali una "situazione decisionale in condizioni di certezza", che è identificata da (X, E, h). Dati due elementi e_1 ed e_2 di E, il decisore deve essere in grado di dire se preferisce e_1 ad e_2 o viceversa (gli è anche consentito dire che è indifferente tra i due). Useremo il simbolo $\sqsupset$ per indicare le preferenze del decisore. Vale a dire, se preferisce l'esito e_1 all'esito e_2, indicheremo con $e_1 \sqsupset e_2$ questo fatto. E' anche comodo avere a disposizione un simbolo per indicare la "preferenza debole": ovverossia scriveremo $e_1 \sqsupseteq e_2$ per indicare che il decisore preferisce e_1 ad e_2 od è indifferente tra loro.

Abbiamo a questo punto arricchito il nostro modello che, in termini formali, sarà: $(X, E, h, \sqsupseteq)$. Notiamo che la Tabella 1, che abbiamo usato per rappresentare la situazione decisionale "sulla scelta del frutto", non contiene alcuna informazione sulle preferenze del decisore. Se vogliamo rappresentare in forma di tabella il modello "arricchito" $(X, E, h, \sqsupseteq)$, dobbiamo trovare un modo per rappresentarle. Come? Di espedienti grafico-pittorici ne possiamo inventare vari. Ad esempio, potremmo usare delle frecce per indicare le preferenze del decisore. Nel nostro caso, se il decisore preferisce consumare una mela ad un'arancia allora descriveremo ciò come segue: "consumare una mela" $\rightarrow$ "consumare un'arancia". Se inoltre il decisore preferisce una mela anche ad una pera e preferisce consumare un'arancia ad una pera, otterremo la Tabella 2, di interpretazione ancora ragionevolmente agevole.

Non è questo l'unico modo che abbiamo a disposizione, per fortuna. Perché, all'aumentare del numero delle alternative a disposizione del decisore, questa rappresentazione in forma tabellare diventa molto intricata. Un altro modo consiste nell'utilizzare diverse gradazioni di colore per indicare graficamente le preferenze del decisore. Per esempio, si può usare il rosso con la convenzione che se una casella ha una colorazione di rosso più forte di un'altra, questo vuol dire che il decisore preferisce l'esito indicato nella prima casella a quello nella seconda.

alternative disponibili	*esiti*
mela	1
arancia	0
pera	-1

Tabella 3: Scelta del frutto e utilità.

Possiamo usare una rappresentazione più maneggevole introducendo le "funzioni di utilità" per i giocatori. Cosa vuol dire? Abbiamo detto che il decisore ha delle preferenze su E, che abbiamo indicato col simbolo $\sqsupseteq$. Se riusciamo a trovare una funzione $u : E \to \mathbb{R}$ tale che:

$$u(e_1) > u(e_1) \quad \text{se e solo se} \quad e_1 \sqsupset e_2,$$

allora diciamo che questa funzione u "rappresenta le preferenze del decisore", od anche che è una "funzione di utilità per il decisore". Nel nostro esempio è facile. Se il decisore preferisce "consumare una mela" a "consumare una pera", sarà sufficiente definire $u($"consumare una mela"$) = 1$ e $u($"consumare una pera"$) = -1$. E magari anche $u($"consumare un'arancia"$) = 0$. Si noti che i valori assegnati ad u non sono obbligati. Possiamo anche definire $u($"consumare una mela"$) = 87$, $u($"consumare un'arancia"$) = 30$ ed $u($ "consumare una pera"$) = 11$.

L'unica cosa che è essenziale è che venga soddisfatta la condizione che $u($"consumare una mela"$) > u($"consumare un'arancia"$) > u($"consumare una pera"$)$. Ritorneremo più diffusamente su preferenze e funzioni di utilità nel prossimo capitolo. Per ora ci accontentiamo di questi pochi elementi, essenziali per la modellizzazione.

In questo modo ad ogni cella della colonna "esiti" della Tabella 1 abbiamo associato un numero. Otteniamo quindi la Tabella 3.

Ogni cella della matrice contiene un numero che rappresenta il valore che la funzione di utilità del decisore assume in corrispondenza dell'esito che sta in quella cella. Si noti che la Tabella 3 individua una funzione reale definita su X. Abbiamo $f : X \to \mathbb{R}$ i cui valori leggiamo guardando il numero nella cella. Ad esempio, $f(\text{mela}) = 1$. Volendo, per maggiore sinteticità possiamo anche usare M, A e P al posto di "mela", "arancia" e "pera" così scriveremmo $f(M) = 1$, $f(A) = 0$ e $f(P) = -1$.

Ebbene, la Tabella 3 contiene gli elementi essenziali della situazione decisionale in condizioni di certezza, che potrà quindi essere descritta come (X, f). Conviene fare un diagramma per comprendere la semplificazione che è stata fatta. I nostri dati erano $X, E, h, \sqsupseteq$, che poi abbiamo trasformato in

X, E, h, u introducendo le funzioni di utilità per i giocatori. Questi dati li possiamo rappresentare col seguente diagramma:

$$X \xrightarrow{\quad h \quad} E \xrightarrow{\quad u \quad} \mathbb{R}$$

Con l'introduzione delle funzioni f (si noti che f non è altro che la composizione delle due funzioni h ed u) otteniamo invece questo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend left, "f"] & E \arrow[r, "u"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

che poi semplifichiamo cancellando la parte centrale (ovverosia, E, h, u):

$$X \xrightarrow{\qquad f \qquad} \mathbb{R}$$

Il lettore attento si chiederà se non stiamo usando implicitamente qualche ipotesi per poter fare questa semplificazione (detto in altri termini: non è che stiamo eliminando dal modello qualche elemento essenziale?). La risposta è che stiamo sfruttando un principio standard della teoria delle decisioni: il principio di consequenzialismo. Ovverosia, ciò che è rilevante per il decisore sono le conseguenze delle sue azioni, delle sue scelte. Quindi, che venga adottata l'alternativa $x_1 \in X$ oppure $x_2 \in X$ non fa nessuna differenza, per quanto riguarda il decisore, purché diano luogo alle stesse conseguenze: vale a dire, purché si abbia $h(x_1) = h(x_2)$ (si noti come da questo segua automaticamente che $f(x_1) = f(x_2)$). Nell'esempio che stiamo seguendo si potrebbero avere le due alternative, distinte in X, "mela" e "apple", ma comunque si avrebbe $h(\text{mela}) = h(\text{apple}) =$ "consumare una mela" (e quindi $f(\text{mela}) = f(\text{apple}) = 1$). Se questo non fosse vero, non potremmo "cancellare" h ed E. Si noti che f non fa altro che riprodurre su X le preferenze del decisore rispetto alle conseguenze, rileggibili (e di fatto rilette) in termini di alternative disponibili: indicheremo tali preferenze su X con il simbolo $\succeq$. Siamo giunti a definire quindi quello che può essere considerato il modello standard delle decisioni in condizioni di certezza: la coppia $(X, \succeq)$, dove X è solo un insieme non vuoto e $\succeq$ è una relazione su X.

Per quello che concerne il criterio, la questione è: date le preferenze e le alternative (abbiamo visto come le alternative sono legate alle conseguenze), cosa si fa con queste? La risposta è ovvia: si sceglie tra le alternativein X quella (o quelle) che si preferisce maggiormente.
Si noti che i tre ingredienti non sono completamente indipendenti. Sono legati insieme. Quando parliamo di preferenze, abbiamo naturalmente l'idea di quello che faremo con queste preferenze. È ovvio che le preferenze siano legate all'insieme delle conseguenze e, per il principio di consequenzalismo, a quello delle alternative disponibili.

2 Preferenze e funzioni di utilità: proprietà strutturali.

Nella parte precedente abbiamo introdotto gli ingredienti fondamentali del modello di scelta decisionale in condizioni di certezza e abbiamo notato alla fine che per giungere al criterio di scelta dobbiamo passare necessariamente attraverso la descrizione dettagliata su come sono fatte le **preferenze sulle conseguenze**.

In realtà tale passaggio è necessario perchè stiamo seguendo una certa impostazione più "moderna". Infatti storicamente, il primo oggetto di interesse furono le funzioni di utilità, la cui entrata in scena può essere attribuita all'"utilitarismo", sviluppato da Bentham (ed altri). Le preferenze vennero molto dopo, che non è sorprendente, poiché sono oggetti matematici astratti più sofisticati. L'interesse per le preferenze, opposte alle funzioni d'utilità, deve essere attribuito alle difficoltà di misurare le "utilità" che un decisore (tipicamente, un consumatore) assegna ai differenti oggetti della scelta. In effetti è molto più semplice "ordinare" gli oggetti della scelta piuttosto che misurarne l'utilità. Consideriamo ad esempio il caso della scelta tra diversi panieri di consumo, dove ciascun paniere contiene una diversa combinazione di beni e servizi. Si può ipotizzare che gli individui posseggano dei desideri, e che vogliano soddisfarli attraverso l'acquisto di questi panieri. Ciò che non si ritiene possibile è l'introduzione di un'unica unità di misura, definita come la soddisfazione ottenuta nel realizzare i desideri, con la quale misurare il grado si soddisfazione fornito dai vari panieri. E' invece possibile ritenere che i desideri generino un ordinamento di preferenze tale per cui un decisore sia sempre in grado di dire se preferisce un paniere rispetto ad un altro, o se è indifferente tra i due. Forse quest'aspetto di semplificazione del modello apportato dall'idea di preferenze del decisore era passato inosservato nel precedente capitolo.

Vediamo un esempio ancora più concreto di cio', questa volta riferito ad una scienza applicata quale la geologia.

Esempio 1 *I geologi spesso si trovano a dover concretamente valutare (ma se volete leggete pure "decidere") la durezza di un minerale. Per fare ciò il geologo oggi può riferirsi ad una scala assoluta di durezza, calcolabile tramite strumenti abbastanza sofisticati quali lo sclerometro, che definisce la durezza in modo numerico. Prima dell'introduzione di tale strumento, tuttavia, il problema della valutazione della durezza dei minerali veniva affrontato in maniera diversa, adottando cioè una classificazione ordinale: la Scala di Mohs. La Scala di Mohs è un criterio empirico per la valutazione della durezza dei materiali ideato dal mineralogista austriaco Friederich Mohs (1772-1839). Essa assume come riferimento la durezza di dieci minerali numerati progressivamente da 1 a 10 e tali che ciascuno è in grado di scalfire quello che lo precede ed è scalfito da quello che lo segue. Il primo minerale della serie è il talco, poi seguono nell'ordine gesso, calcite, fluorite, apatite, ortoclasio, quarzo, topazio, corindone e, infine, diamante. La scala di Mohs, tuttora usata per la sua praticità, consiste tuttavia di una prova di tipo ordinale, cioè per confronto.*

Faremo di solito qualche assunzione su $(E, \sqsupseteq)$, che sono raccolte nella seguente tabella. Sulla sinistra c'è il nome della proprietà, sulla destra viene scritto il significato inteso (l'interpretazione) della proprietà.

E è un insieme	l'insieme delle conseguenze
$\sqsupseteq$, una relazione su E	le preferenze del decisore
$\sqsupseteq$ è riflessiva	nessun serio significato
$\sqsupseteq$ è transitiva	condizione di coerenza: assunzione essenziale sulla razionalità del decisore
$\sqsupseteq$ è totale	il decisore può sempre esprimere le sue preferenze rispetto a qualsiasi coppia di esiti

Fissiamo la terminologia matematica:

Definizione 1 *Una relazione $\sqsupseteq$ su E si dice essere un* preordine *se è riflessiva e transitiva. Si dice essere un* preordine totale *se è un preordine ed è anche totale. Diciamo che una relazione $\sqsupseteq$ definita su E è:*
riflessiva, se: $\forall x \in E, \quad x \sqsupseteq x$
transitiva, se: $\forall x, y, z \in E, \quad x \sqsupseteq y$ *e* $y \sqsupseteq z$ *implica* $x \sqsupseteq z$
totale, se: $\forall x, y \in E, \quad x \sqsupseteq y$ *o* $y \sqsupseteq x$

Si noti che molto spesso, specialmente sui testi scritti dagli economisti, invece della parola "totale", si troverà la parola "completo". Un'osservazione: se una relazione è totale, allora è riflessiva, come si può facilmente vedere.
Alcune osservazioni sull'interpretazione delle proprietà. Per come viene intesa la riflessività, non c'è un'importante interpretazione. Si tenga in considerazione che, chiaramente, $\sqsupseteq$ è un certo tipo di relazione d'"ordine". E, come è ben noto (ma vi torneremo sopra dopo, con i dettagli) si può usare un punto di vista debole o stretto. La scelta tra questi è in generale solo una questione di gusto. Se si preferisce usare l'approccio debole (come stiamo facendo ora, poiché usiamo il simbolo $\sqsupseteq$ invece di $\sqsupset$), allora si è "moralmente obbligati" ad assumere che la relazione sia riflessiva. Se, al contrario, si preferisce lavorare con $\sqsupset$, allora non si richiederà la riflessività. Si noti che il secondo è il punto di vista adottato in una coppia di libri come Fishburn (1970) o Kreps (1988), che sono delle fonti eccellenti per studiare la teoria delle decisioni.
Per quanto riguarda l'interpretazione della proprietà "totale", è importante anzitutto avere chiara in mente la distinzione tra "l'indifferenza" da un lato e "l'impossibilità di fare paragoni" dall'altro lato. L'assunzione "totale" non esclude, naturalmente, l'indifferenza (nel seguito indicheremo la relazione di indifferenza con il simbolo $\sim$). Non c'è ragione che obblighi un decisore ad avere preferenze "strette" tra una coppia di conseguenze. Ma non ammetteremo che il decisore sia incapace di confrontare una coppia di conseguenze. Si noti che questa è un'assunzione forte, e in alcuni casi è evidentemente violata. Tuttavia, in molti casi non è una restrizione troppo severa, e poiché ci permette di lavorare in un modo molto più semplice, è consueto assumerla. Chiaramente, ogniqualvolta si modellizza una situazione di decisione, va

testato il realismo (o ragionevolezza) di questa assunzione (come di qualsiasi altra).

Esercizio 1 *Definire la relazione di indifferenza $\sim$ a partire dalla relazione di prefernza debole.*

Esercizio 2 *La relazione di indifferenza $\sim$, è una relazione di equivalenza?*

La condizione chiave è la transitività. È un ingrediente fondamentale per la razionalità come viene di solito intesa dagli economisti.
Il cuore della teoria delle decisioni è l'analisi delle scelte effettuate da decisori *razionali*. Così la transitività sarà assunta in quello che faremo. Chiaramente c'è uno spazio (interessante!) per modellizzare le situazioni in cui i decisori non soddisfano l'assunzione di transitività. Ma il "modello di base" l'assume. Sarà fornito, tra poco, un esempio ("money pump") per mostrare cosa può succedere in assenza di transitività.
Un avvertimento: non dimenticare che la terminologia matematica nel regno delle relazioni di "tipo d'ordine" non è completamente stabilito. Così si possono trovare discrepanze tra libri differenti: si dovrà sempre dare uno sguardo alle definizioni, per evitare equivoci.
Abbiamo appena discusso il realismo di queste assunzioni. Non solo è valido il principio generale che un modello matematico non è in grado di riprodurre tutti i dettagli di una situazione reale, ma ci sono di certo situazioni che sono importanti e nelle quali questi modelli non funzionano. Per esempio, il problema di prendere decisioni sotto la pressione del tempo, o quando è importante il ruolo delle emozioni, non si adattano bene a questo modello di base.

Una delle ragioni dell'insuccesso di questo modello potrebbe essere che le decisioni vengono prese in istanti diversi. Come semplice esempio, assumiamo che si voglia verificare se un decisore è razionale, cioè, se le sue preferenze sono transitive. Si prenderanno degli x, y, z, e gli si chiederà: preferisci x a y? Preferisci y a z? Assumiamo che entrambe le risposte siano positive. Allora, gli si chieda se preferisce x a z. Se la risposta è negativa, si può etichettare questo decisore come "non razionale". In tutto questo lo scarto temporale non dovrebbe essere importante. Ma del tempo (forse molto piccolo) è trascorso tra la prima domanda e l'ultima: un effetto di questo è che il decisore è cambiato. Egli non è esattamente lo stesso, dalla prima all'ultima domanda. Naturalmente, ci sono alcuni casi in cui queste preferenze sono veramente espresse in istanti di tempo significativamente differenti. Così possiamo vedere violazioni della transitività che sono dovute all'effetto

che "nel frattempo" il decisore è cambiato. Chiaramente, c'è dell'area grigia tra i casi in cui un po' di tempo è trascorso e i casi in cui le tre domande sono formulate in un periodo di tempo molto breve: in tale periodo di tempo "intermedio", non è facile attribuire le intransitività alla "irrazionalità" del decisore o al fatto che il decisore, nel frattempo, è cambiato. Questa faccenda della durata del tempo è ben lontana dall'essere solo uno scherzo. Dopo tutto, una ragione di interesse per questa teoria giace sull'abilità di predire le decisioni (o nel suggerire decisioni appropriate) che il decisore dovrà assumere in un *futuro*, forse non così vicino.
C'è una possibile soluzione formale a questo problema del tempo. Aggiungere una "dimensione di tempo" all'insieme E delle conseguenze. Cioè, considerare $G = E \times T$. Con questo "trucco" forse si può recuperare la transitività. Si noti, inoltre, che in qualche caso questo non è affatto un trucco: la dimensione temporale delle decisioni può essere essenziale. Si pensi soltanto alle decisioni finanziarie o di investimento. Dall'altro lato, compare il solito problema di equilibrio nella modellizzazione: si può recuperare la transitività ma a costo di un modello formale più complicato, un modello col quale è più difficile lavorare.
Un'altra ragione per la violazione della transitività è dovuta alla imprecisata specificazione delle conseguenze, o dei "confini" tra diverse conseguenze. Si consideri solo un esempio molto stupido. Si assuma che x sia un pezzo di cioccolato. Si consideri allora x' ottenuto togliendo da x una piccola quantità di cioccolato, diciamo, un microgrammo. Poiché è difficile per un decisore scoprire la differenza tra x e x', possiamo certamente assumere che egli sarà indifferente tra x e x'. Ma chiaramente questa situazione può essere iterata, ottenendo x''. E così via. Dopo un numero sufficientemente grande di volte, la differenza tra il pezzo originale di cioccolata e l'ultimo sarà chiaramente percepita, e se il decisore è un'amante del cioccolato, preferirà strettamente x all'n-esimo pezzo. Questa è, ovviamente, una violazione della transitività. Perché $x \sim x'$, $x' \sim x''$, ..., $x^{(n-1)} \sim x^{(n)}$ dovrebbe implicare $x \sim x^{(n)}$.
Un'ultima ragione per la violazione della transitività che qui sarà citata è dovuta a problemi cognitivi. Per capire ciò, si provi a pensare ad una mela. Cioè, si provi ad ottenere una rappresentazione mentale di una mela. Come la si rappresenta, come viene "descritta" nella mente? È facile verificare che le rappresentazioni che diversi decisori hanno di una mela sono differenti così come sono diverse le rappresentazioni di una stessa mela concrata da parte di decisori differenti. Questo non sarebbe un problema. Il punto interessante è che la rappresentazione di una mela che un decisore ha "oggi" può essere diversa dalla rappresentazione che ha "domani". Si noti che da ciò può derivare un cambio delle preferenze che non ha nulla a che vedere con i cambiamenti di gusto (dovuti a del tempo trascorso, per esempio): la variabile rilevante

qui è la rappresentazione mentale dello stesso identico oggetto. Si tenga in considerazione che una mela, il "concetto" di una mela, è un oggetto molto complicato: così di solito teniamo la nostra attenzione solo su alcuni dei dettagli totali. La conseguenza è che la nostra rappresentazione mentale di una mela può essere diversa in diversi istanti di tempo, che dipende dai dettagli sui quali focalizziamo l'attenzione in quel momento. Questi tipi di problemi sono stati studiati sperimentalmente, e sono così rilevanti che Kahnemann e Tversky hanno sviluppato una teoria su ciò (effetti di "framing").
Questo tipo di discussione sull'assunzione della razionalità possono essere trovati in modo molto più esteso nei già citati testi di Fishburn (1970), Kreps (1988) e Kreps (1990).

Esempio 1 *(Money pump). Questo esempio fornisce un espediente che si può utilizzare se si incontra un decisore con preferenze non transitive, da sfruttare a proprio vantaggio... Più seriamente, è un esempio che mostra il perché la teoria delle decisioni dia così tanta importanza alla transitività delle preferenze, perché identifica pressoché la razionalità con questa proprietà.*
Il decisore ha preferenze su $\mathbb{R} \times E$. $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, dove e_1 è "consumare una mela", e_2 è "consumare un'arancia", e e_3 è "consumare una pera", esattamente come nell'esempio del capitolo precedente sulla scelta del frutto. Gli elementi di $\mathbb{R}$ rappresentano delle quantità di denaro. Le preferenze sono:

$$(0, e_1) \sqsupset (0, e_2) \quad (0, e_2) \sqsupset (0, e_3) \quad (0, e_3) \sqsupset (0, e_1)$$

Per quanto riguarda il denaro, le preferenze sono "standard": maggiore denaro è meglio. Si è assuma anche che le preferenze sono "continue" nel senso che

$$(0, e_k) \sqsupset (0, e_j) \quad \Rightarrow \quad (-\lambda_k, e_k) \sqsupset (0, e_j)$$

per tutti i $k, j \in \{1, 2, 3\}$, e per λ_k abbastanza piccolo. Si noti che l'assunzione fatta sulle preferenze mostra un ciclo stretto, che è più forte della semplice non transitività: la ragione per fare ciò è di afferrare più velocemente gli aspetti essenziali.
La questione è la seguente: se si è così fortunati di incontrare un decisore con tali preferenze, prima di tutto, ci si premuri di avere disponibili una mela, un'arancia e una pera (se non si avessero, le si comprino, per quanto costose siano!). A questo punto, che si fa? Ma è ovvio, gli si fa un regalo. Gli si da un'arancia. E, subito dopo, gli si può dire: "guarda, io possiedo una mela. Mentre tu hai un'arancia. Posso darti la mela, purché tu mi dia indietro l'arancia, insieme ad una piccola quantità di denaro". In base alle preferenze del decisore, ci sarà un qualche piccolo ammontare di denaro per il quale egli desidererà fare lo scambio. Naturalmente, immediatamente dopo si

può ricominciare: "hey, io ho una pera...". E così via. Con questo "money pump" voi diventate ricchi, alle spese del decisore.

Resta da parlare delle **funzioni d'utilità**
Dato $(E, \sqsupseteq)$, dove $\sqsupseteq$ è un preordine totale, si può fare la seguente
Domanda: Si può trovare una funzione $u : E \to \mathbb{R}$, t.c.:

$$x \sqsupseteq y \quad \Leftrightarrow \quad u(x) \geq u(y) \ ?$$

Forse, il primo commento dovrebbe essere: perché tale domanda? Perché pensiamo che ci debba essere una possibile risposta positiva? La ragione per sperarlo viene dal seguente fatto. Data $f : X \to \mathbb{R}$, si può definire:

$$x \sqsupseteq_u y \quad :\Leftrightarrow \quad u(x) \geq u(x)$$

È immediato verificare che $x \sqsupseteq_u$ è un preordine totale su E. Un piccolo commento a parte: questa costruzione mostra che ci sono molti preordini che possono essere definiti su un insieme E: si prenda solo qualsiasi u, e questo fornirà un preordine totale (questo risponde ad una delle domande che un lettore intelligente avrebbe dovuto chiedersi, come la seguente: questi preordini, definiti per mezzo di diverse funzioni u sono diversi?). Tornando alla nostra questione, l'osservazione fatta sopra dà buone possibilità che la domanda sollevata possa avere una risposta positiva. Così diamo la seguente:

Definizione 2 *Dato $(E, \sqsupseteq)$, dove $\sqsupseteq$ è un preordine totale, una funzione $u : E \to \mathbb{R}$ t.c.:*

$$x \sqsupseteq y \quad \Leftrightarrow \quad u(x) \geq u(x)$$

si dice essere una funzione d'utilità per $\succeq$.

Risposta (alla domanda). La risposta è ovviamente sì se E è un insieme finito. Perché? Perché è facile fornire un'esplicita costruzione algoritmica per una funzione d'utilità. Si assuma che $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Cominciamo da e_1 e definiamo $u(e_1) = 0$. Allora, si prenda e_2. Se $e_2 \sim e_1$, allora definiamo $u(e_2) = 0$. Se $e_2 \succ e_1$, allora definiamo $u(e_2) = 1$, e se $e_1 \sqsupset e_2$, allora definiamo $u(e_2) = -1$. Si guardi poi e_3. Se e_3 è strettamente preferito a tutti i precedenti elementi, definiamo $f(e_3) = 2$, e similmente se è il peggiore. In caso di indifferenza con uno precedente, il valore assegnato a $u(e_3)$ coinciderà con il valore assegnato all'elemento indifferente. Se e_3 si colloca strettamente tra i due elementi precedenti, definiamo $u(e_3)$ come il valor medio di $u(e_1)$ e $u(e_2)$. La costruzione procede allo stesso modo per i rimanenti elementi di E. Osserviamo solo che, dato e_k, se ci sono un elemento strettamente preferito ad

e_k ed un elemento strettamente peggiore, si devono individuare gli elementi di E che sono più vicini (nel senso di preordine) ad e_k, e poi definire $u(e)$ come il valore medio dei valori assegnati a questi valori più vicini ad e_k.

La risposta continua ad essere positiva nel caso in cui E sia numerabile. Si prenda solo $E = \{e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$ e si usi la stessa procedura. Ci sono abbastanza numeri reali per accondiscendere alle procedure richieste di prendere i valori medi.

La risposta è molto meno ovvia nel caso generale. È facile prevedere che le *proprietà di continuità* avranno un qualche ruolo, poiché altrimenti usando insiemi non numerabili si possono facilmente fornire esempi particolarmente selvaggi. Intuitivamente, la proprietà di continuità *sulle preferenze* richiede che spostandosi da esiti che sono strettamente peggiori di un certo esito iniziale verso esiti che sono strettamente migliori di quest'ultimo, si deve incrociare un esito indifferente. Se si passasse direttamente da esiti peggiori a esiti migliori senza incontrare esiti indifferenti le preferenze non sarebbero continue. Il vantaggio derivante dalla proprietà di continuità è che, assieme alle altre ipotesi sulla razionalità, ci consente di dimostrare l'esistenza di una funzione di utilità che rappresenta le preferenze. Tale proprietà sulle preferenze si chiama di continuità non a caso. Infatti se $\sqsupseteq$ su E è un preordine totale che soddisfa inoltre la proprietà di continuità allora si dimostra non solo che esiste una funzione di utilità che rappresenti $\sqsupseteq$, ma possiamo anche garantire che esista una funzione di utilità *continua*.

Esempio 2 *Vediamo un esempio pratico di funzione di utilità. Consideriamo la situazione in cui un decisore voglia decidere quale investimento fare tra quelli di un insieme di cui conosce perfettamente i ritorni monetari e i tempi di ritorno (cash-flow). In altri termini, un investimento $x \in E$ sarà individuato da un vettore $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, dove l'indice $t = 0, 1, ..., n$ rappresenta l'anno in cui ritorna dall'investimento la quantità monetaria e_t. Un criterio utilizzato nel mondo della finanza per valutare quale investimento effettuare è il VAN (Valore Attuale Netto), conosciuto anche sotto l'acronimo inglese NPV (Net Present Value). Assumendo, come ipotesi ulteriormente semplificativa, che il fattore di sconto δ sia costante per tutta la durata degli n anni, il VAN dell'investimento e è semplicemente dato dalla somma*

$$VAN(e) = \sum_{k=0}^{n} \delta^k x_k$$

La funzione VAN determina una relazione sugli investimenti in E che è anche un preordine totale; detto diversamente, la funzione VAN e una funzione di utilità delle preferenze di chi usa il VAN per decidere quale investimento fare.

Esercizio 3 *Mostrare che la funzione VAN determina un preordine totale sull'insieme degli investimenti E.*

Ora che conosciamo alcune proprietà che permettono di garantire l'esistenza delle funzioni di utilià e di controllarne la struttura, possiamo porci ulteriori domande inerenti l'unicità di tali funzioni. Dato $(E, \sqsupseteq)$, si assuma che ci sia una $u : E \to \mathbb{R}$ che lo rappresenta. È unica? La risposta è no. Chiaramente, $2u$, $u+1$, rappresentano lo stesso preordine. Le funzioni di utilità che abbiamo introdotto sono funzioni di utilità ordinale. Al contrario dell'utilitarismo tradizionale (quello storico, per intenderci) tale funzione non misura una quantità assoluta di soddisfazione di qualsivoglia sensazione, desiderio o piacere; nè può essere utilizzata per confrontare diversi livelli di soddisfazione di diversi decisori. E' invece soltanto un modo per definire un ordinamento, quali che siano gli indici numerici utilizzati (vedi l'esempio scelta del frutto). In altri termini, non è al valore assoluto che bisogna guardare, bensì al valore relativo rispetto alle altre possibili opzioni, in modo tale che l'ordinamento sia rispettato, quale che sia la funzione di utilità effettivamente utilizzata. Tale molteplicità di funzioni di utilità che rappresentano lo stesso ordinamento viene espressa dal fatto, dimostrabile, che data una qualsiasi funzione $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente crescente, $\phi \circ u$ rappresenta ancora $\sqsupseteq$.

Ultima osservazione sul modello standard del problema decisionale in condizioni di certezza $(X, \succeq)$. Alla fine del precedente capitolo, avevamo osservato che le preferenze $\sqsupseteq$ su E, adottando il principio di consequenzalismo, determinavano le preferenze $\succeq$ su X, rappresentate dalla funzione di utilità $f = u \circ h$. Tale asserzione continua ovviamente a rimanere vera, ma ora che sappiamo più accuratamente come sono fatte le preferenze, ovvero che $\sqsupseteq$ è un preordine totale su E, possiamo anche affermare che $\succeq$ è esso stesso un preordine totale su X. Per concludere, quindi, il modello standard per le decisioni in condizioni di certezza è formalmente dato da una coppia $(X, \succeq)$, dove X è un insieme non vuoto e $\succeq$ è un preordine totale su X.

A questo punto dovrebbe essere chiaro il criterio di scelta del decisore razionale: egli sceglierà l'alternativa che rende massimo il valore assegnato da *una* sua funzione di utilità sulle alternative.

Esercizio 4 *Individuare un criterio di confronto fra investimenti che* non *sia riconducibile ad un preordine totale sull'insieme dei "cash-flow".*