Sen e l'impossibilità di essere un paretiano liberale

Abbiamo un insieme C (supporremo in tutto quel che segue che C sia un insieme FINITO) e vogliamo scegliere un elemento $c \in C$, in modo da tenere conto delle preferenze $\succeq_i$ (con $i = 1, \dots, n$) su C di un gruppo N di individui: $N = \{1, \dots, n\}$.

Come per Arrow consideriamo delle *social choice rule* esprimibili mediante aggregazione di preferenze. Cioè, se ad ogni profilo di preferenze in $\mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \dots \mathcal{P} = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{P} = \mathcal{P}^n$ vogliamo associare un preordine totale su C. Nota: con il simbolo $\mathcal{P}$ è stato indicato l'insieme di tutti i preordini totali su C.

Diremo *social welfare function* una $\Phi : \mathcal{P}^n \to \mathcal{P}$.

Le condizioni che Sen impone a Φ sono le seguenti:

(U) [dominio universale]: Questa condizione è già stata imposta implicitamente assumendo che Φ sia definita su $\mathcal{P}^n$, ovverosia richiedendo che Φ sia definita per ogni profilo di preferenze

(WP) [principio di Pareto (debole), o condizione di unanimità[1]]:

$$\forall c', c'' \in C, \forall (\succeq_i)_{i \in N} : \quad [c' \succ_i c'' \quad \forall i \in N] \Rightarrow c' \sqsupset c''$$

(L^*) [liberalismo minimale]:

Esistono almeno due individui tali che, per ciascuno di loro vi è almeno una coppia di alternative rispetto alle quali egli è decisivo. Ovvero, se egli preferisce c' a c'', lo stesso deve valere per le preferenze della società.[

Teorema (Sen, 1970). Non vi è alcuna $\Phi : \mathcal{P}^n \to \mathcal{P}$ che soddisfi P, ed L^* (ricordo che U vale, per come abbiamo imposto essere il dominio di Φ).

Sen, A. (1970): *The Impossibility of a Paretian Liberal*, Journal of Political Economy, **78**, 152-157.

[1]Indico per comodità $\Phi((\succeq_i)_{i \in N}) = \sqsupseteq$.

ADDENDA

Volendo, si può sviluppare un linguaggio, un modello formale in cui inserire la questione del "liberalismo minimale". In questo modello, i *diritti* sono identificati con un insieme di coppie ordinate di elementi di C. Vediamo i dettagli.

Ad ogni individuo i è associato $D_i \subseteq X \times X$. Questo insieme di coppie ordinate rappresenta i diritti di i sulle coppie di alternative. Al di là del discorso formale che faremo, l'insieme D_i dovrebbe rappresentare quelle coppie sulle quali le preferenze di i sono determinanti, nel senso che la società non può fare altro che prenderne atto.

Possiamo assumere, per semplicità, che i diritti siano "two-way", cioè che:

$$(x, y) \in D_i \quad \Leftrightarrow \quad (y, x) \in D_i$$

Possiamo "interpretare" questa condizione come rappresentante l'idea che i diritti di i "contano" sia in un verso che nell'altro. Cioè sia quando lui preferisce x ad y che quando le sue preferenze sono opposte. Non c'è ragione per cui non possa essere immaginato che vi siano dei diritti solo "unidirezionali". Ripeto, la assunzione di "bidirezionalità" è essenzialmente una condizione che mettiamo per semplificare l'analisi.

Per evitare banalità, faremo anche le seguenti assunzioni:

- vi siano almeno due individui k ed m con D_k e D_m non vuoti
- che i diritti degli individui siano *non banali*, cioè che per ogni individuo i e per ogni $x \in X$ si abbia $(x, x) \notin D_i$
- che i diritti siano *esclusivi*, cioè che $\nexists i, j$ con $i \neq j$ ed x, y t.c. $(x, y) \in D_i \cap D_j$

Diciamo che un individuo i è *decisivo* (binariamente) su $\{x, y\}$ se[2]:

- $x \succ_i y \quad \Rightarrow \quad x \sqsupset_S y$
- $y \succ_i x \quad \Rightarrow \quad y \sqsupset_S x$

Principio di liberalismo (L)
Una regola di aggregazione Φ rispetta i diritti se:

$$\forall i, \forall x, y \in X \, [(x, y) \in D_i \quad \Rightarrow \quad i \text{ è decisivo su } \{x, y\}]$$

[2]Vedi nota precedente.

Il teorema di Sen dice che non esiste $\Phi : \mathcal{P}^n \to \mathcal{P}$ che soddisfi (WP) ed (L). Ri-ricordo che U vale, per come abbiamo imposto essere il dominio di Φ.

Il risultato di Sen può anche essere trovato qui:
Sen, A. (1982): *Choice, welfare and measurement*, Cambridge University Press, Cambridge (MA, USA).