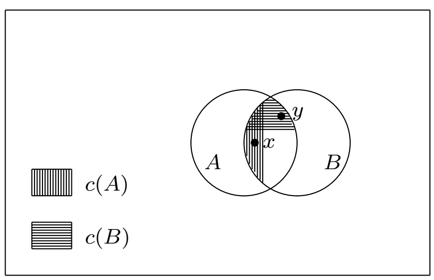
1 Choice Function, preordine totale: equivalenza degli approcci (Houthakker).

Indicherò con $\mathcal{P}_{\blacksquare}(X)$ l'insieme delle parti NON VUOTE di X. Cioè l'insieme di tutti i sottoinsiemi non vuoti di X.

Una *choice function* (su X) è:
$c : \mathcal{P}_{\blacksquare}(X) \to \mathcal{P}(X)$ tale che $c(A) \subseteq A \ \ \forall A \in \mathcal{P}_{\blacksquare}(X)$.
Imponiamo che c soddisfi le seguenti due condizioni:
1) $c(A) \neq \emptyset \quad \forall A \in \mathcal{P}_{\blacksquare}(X)$.
2) [Houthakker]: $\forall x, y \in A \cap B$:
$[x \in c(A) \ \text{ e } \ y \in c(B)] \ \Rightarrow \ x \in c(B)$.

Si noti che, se la condizione 2) è soddisfatta, ne segue che è anche vero:
$([x \in c(A) \ \text{ e } \ y \in c(B)] \ \Rightarrow \ [x \in c(B) \ \text{ e } \ y \in c(A)])$.

Vediamo un esempio in cui la condizione di Houthakker è violata:



$$x \in c(A), \ y \in c(B) \quad \not\Rightarrow \quad y \in c(A), \quad x \in c(B)$$

Una prima, importante conseguenza della condizione 2) è che le preferenze di un individuo, deducibili a partire dalle scelte che effetua, sono determinate dalle sue scelte su insiemi contenenti solo due elementi.
Vediamo in dettaglio e formalmente questo fatto.
Cominciamo col definire le preferenze "dedotte" da c.

Definizione 1.1 *Data $c : \mathcal{P}_{\blacksquare}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, choice function, definiamo:*
$x \succ_c y : \ \Leftrightarrow \ [\forall A \subseteq X \text{ t.c. } x, y \in A, \ y \notin c(A)]$.
Si noti che, senza supporre alcuna restrizione sulla choice function, la relazione che otteniamo può essere molto "irregolare".

Esempio 1.1 *Sia $X = \{1, 2, 3\}$ e sia $c(A) = \emptyset \ \forall A \in \mathcal{P}_{\blacksquare}(X)$.*
Allora $x \succ_c y$ sempre, qualunque siano $x, y \in X$.
In particolare, $x \succ_c x \ \ \forall x \in X$.
Ovviamente la stranezza è dovuta al fatto che, essendo c a valori vuoti, le

premesse nella implicazione che è nella definizione non è mai vera. E quindi l'implicazione lo è....

Esempio 1.2 *Sia* $X = \{1, 2, 3\}$ *e sia* $c(\{x\}) = \{x\}$ $\forall x \in X$*;*
$c(\{1, 2\}) = \{1\}$, $c(\{2, 3\}) = \{2\}$, $c(\{3, 1\}) = \{3\}$; $c(X) = \emptyset$.
Allora è $1 \succ_c 2$, $2 \succ_c 3$, $3 \succ_c 1$. *Una vecchia conoscenza, non transitiva...*

Se invece assumiamo che valgano le condizioni 1), 2), abbiamo tanto per cominciare il seguente risultato (molto importante!):

Teorema 1.1 *Dato* X *ed una choice function* c *soddisfacente 1), 2) si ha che :*
$x \succ_c y \;\Leftrightarrow\; c(\{x, y\}) = \{x\}$.
Dimostrazione.
$\Rightarrow$) *Visto che* $c(\{x, y\}) \neq \emptyset$, *e visto che* $y \notin c(A)$ *(in quanto* $x \in c(A)$*), c'è poca scelta...*
$\Leftarrow$) *Supponiamo di sapere che* $c(\{x, y\}) = \{x\}$. *E cerchiamo di dedurre che per ogni* A *tale che* $x, y \in A$, $y \notin c(A)$. *Supponiamo per assurdo che* $y \in c(A)$.
Detto $B = \{x, y\}$ *e* $y \in c(A)$, *ne segue che deve essere* $y \in c(B)$.
Così $y \in c(\{x, y\})$. *Contro l'ipotesi fatta.*

Non credo sia il caso di spendere troppe parole: l'utilità di questo teorema dovrebbe essere evidente.
Vediamo ora di dimostrare che $\succ_c$ è asimmetrica e negativamente transitiva.
Grazie al teorema, la asimmetria è ovvia.
Dimostriamo che è negativamente transitiva. Supponiamo $x \succ_c y$.
Dobbiamo garantire che vale $x \succ_c z \;\vee\; z \succ_c y \;\; \forall z \in X$.
Per definizione, essendo $x \in A$, non può essere $y \in c(A)$.
Allora $c(A) \subseteq \{x, z\}$. Vediamo i tre casi possibili:

I) $c(\{x, y, z\}) = \{x\}$.
Consideriamo $A = \{x, y, z\}$ e $B = \{x, z\}$.
Se fosse $z \in c(B)$, si avrebbe (per Houthakker):
$x \in c(A)$ e $z \in c(B)$ e quindi $z \in c(A)$. Falso.
Allora $z \notin c(B)$. Quindi $c(B) = \{x\}$. E pertanto (grazie al teorema) $x \succ_c z$.

II) $c(\{x, y, z\}) = \{z\}$.
Consideriamo $A = \{x, y, z\}$ e $B = \{y, z\}$.
Se fosse $y \in c(B)$, si avrebbe (per Houthakker):
$z \in c(A)$ e $y \in c(B)$ e quindi $y \in c(A)$. Falso.
Allora $y \notin c(B)$. Quindi $c(B) = \{z\}$. E pertanto (grazie al teorema) $z \succ_c y$.

III) $c(\{x, y, z\}) = \{x, z\}$.
Consideriamo $A = \{x, y, z\}$ e $B = \{y, z\}$.

Se fosse $y \in c(B)$, si avrebbe (per Houthakker):
$z \in c(A)$ e $y \in c(B)$ e quindi $y \in c(A)$. Falso.
Allora $y \notin c(B)$. Quindi $c(B) = \{z\}$. E pertanto (grazie al teorema) $z \succ_c y$.

Quindi abbiamo che c induce una relazione $\succ_c$ che è asimmetrica e negativamente transitiva.
Ricordo che da una relazione $\succ$ asimmetrica e negativamente transitiva, possiamo definire una choice function $c_\succ$ così:
$c_\succ(A) \ = \ \{x \in A : \nexists \ y \in A \ t.c. \ y \succ x\}$.
Ovviamente la choice function la possiamo definire per una qualsiasi relazione p su X. Ma la asimmetria e la negativa transitività ci assicurano che la choice function abbia proprietà ragionevoli (in particolare la 1) e 2)). Purché X sia finito.

Esercizio 1.1 *Se X è un insieme finito e $\succ$ è asimmetrica e negativamente transitiva, dimostrare che $c_\succ$ è avalori non vuoti e che soddisfa le condizioni di Hauthakker.*

A questo punto sarebbe interessante dimostrare che:
$c_{\succ_c} \ = \ c$!! E che $\succ_{c_\succ} \ = \succ$.

Esercizio 1.2 *Dimostrare che $c_{\succ_c} \ = \ c$ e che $\succ_{c_\succ} \ = \succ$.*

(*Suggerimento:* $c_{\succ_c}(A) \ = \ \{x \in A : \nexists \ y \in A \ t.c. \ y \succ_c x\}$. Allora:
$c_{\succ_c}(A) \ = \ \{x \in A : \ \forall y \in A, \ [c(\{x, y\}) = \{x\} \ \vee \ c(\{x, y\}) = \{x, y\}]\}...$).

Esercizio 1.3 *Perché, data c, non è saggio definire $\succ_c$ nel modo seguente?*
$x \succ_c y \ \Leftrightarrow \ \forall A \subseteq X t.c. \ x, y \in A, \ x \in c(A) \ e \ y \notin c(A)$.

Esercizio 1.4 *E perché non è saggio neppure questo?*
$x \succ_c y \ \Leftrightarrow \ \forall A \subseteq X t.c. \ x, y \in A, \ x \in c(A) \ \Rightarrow \ y \notin c(A)$.

Un approccio analogo, ma non identico, lo si può trovare su Fishburn (esercizio 14, pag. 24). Il lettore particolarmente interessato potrebbe fare il confronto tra i due metodi. Visto che l'esercizio di Fishburn fa riferimento ad un lavoro di Arrow, può essere utile consultare:
Arrow, Kenneth J. : "Rational choice function and orderings", Economica, vol. 26, pp. 121-127, 1959.