4 Il problema dei territori comuni (the tragedy of the commons)

Fin dal settecento (Hume, 1739) gli economisti hanno capito che se ciascuno pensa soltanto ai propri interessi, la ricchezza totale diminuisce e le risorse dell'ambiente si esauriscono in breve tempo. Ecco un esempio che illustra questo fatto.
Consideriamo n pastori in un villaggio, i quali tutte le estati portano le pecore a pascolare in un pascolo comune vicino al villaggio. Sia x_i il numero di pecore possedute dall' i - esimo pastore e sia $s = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ il numero totale di pecore. Sia C il costo di allevare una pecora e supponiamo che esso sia indipendente dal numero di pecore possedute da un pastore. Indichiamo con $f(s)$ il ricavo che un pastore ottiene portando a pascolare una pecora; esso dipende dal numero totale s di pecore al pascolo ed é una funzione decrescente di s , perché all'aumentare di s ogni pecora ha meno erba a disposizione. Inoltre, quando ci sono poche pecore al pascolo, aggiungere una pecora danneggia poco le rimanenti (quindi $f(s)$ diminuisce poco), mentre quando il pascolo é vicino al limite di saturazione, aggiungere una pecora danneggia molto le rimanenti e quindi $f(s)$ diminuisce molto. Indicando con M il numero massimo di pecore che il pascolo puó sopportare, la funzione f é definita soltanto per i numeri interi compresi tra 1 e M , ma per comoditá noi supponiamo di poterla prolungare ad una funzione di variabile reale $f : [0, M] \to \mathbb{R}$, definita in tutto l'intervallo $[0, M]$, decrescente e concava (cioé $f' \leq 0$, $f'' \leq 0$: questo traduce le osservazioni fatte prima). Supponiamo anche che $f(M) = 0$) e $f(0) = A > C$ (altrimenti non ci sarebbe nessun guadagno a portare le pecore al pascolo). Da queste ipotesi segue che $f(s)$ potrebbe essere costante ($= A$) in un intorno destro $[0, B]$ di 0, ma non appena $f(s)$ diventa $< A$, la sua derivata $f'(s)$ diventa strettamente negativa, quindi $f(s)$ diventa strettamente decrescente.

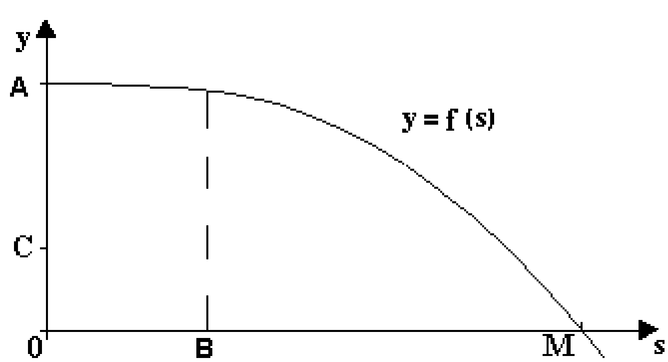

Figura 4.1

Il grafico di $f(s)$ é del tipo illustrato in figura 4.1
In primavera gli n pastori devono decidere contemporaneamente quante pecore portare al pascolo. Se l'i-esimo pastore decide di portare al pascolo x_i pecore, la sua funzione di utilitá u_i (ricavo - spesa) sará:

$$u_i(x_1, x_2 + \ldots, x_n) = x_i f(x_1 + \ldots + x_n) - Cx_i \qquad (1)$$

La situazione si puó quindi, schematizzare con un *gioco non cooperativo a n giocatori*, definito come una (2n+1) - upla $G = (N, X_1, X_2 \ldots, X_n, u_1, u_2 \ldots, u_n)$, dove N é l'insieme degli n giocatori, $X_1, \ldots, X_n$ sono gli insiemi delle strategie degli n giocatori e $u_i : X_1 \, x \, X_2 \, x \ldots x \; X_n \rightarrow R$ é la funzione di utilitá del giocatore i - esimo. Ció significa che, fissate la strategie $x_1, x_2 \ldots, x_n$ degli n giocatori (x_i appartiene all'insieme X_i), $u_i(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ rappresenta il guadagno del giocatore i- esimo. Nel nostro caso gli insiemi delle strategie $X_1, \ldots, X_n$ coincidono tutti con l'intervallo $[0, M]$. La strategia x_i dell'i- esimo giocatore é semplicemente il numero di pecore che egli decide di portare al pascolo e la sua funzione di utilitá u_i é data dalla formula (1) precedente .
Ricordiamo che per un gioco non cooperativo a n giocatori, un *equilibrio di Nash* é una n - pla di strategie $X* = (x_1*, x_2 * \ldots, x_n*)$ tale che nessun giocatore abbia interesse, partendo da $X*$, a cambiare unilateralmente la sua strategia, cioé tale che sia :

$$u_i(x_1*, \ldots x_{i-1}*, x_i, x_{i+1}*, \ldots x_n*) \leq u_i(x_1*, \ldots x_{i-1}*, x_i*, x_{i+1}*, \ldots x_n*)$$

per ogni strategia x_i appartenete a X_i e per ogni i da 1 a n.

Teorema 4.1 *Nelle ipotesi fatte, il gioco dei territori comuni* $G = (N, X_1, X_2 \ldots, X_n, u_1, u_2 \ldots, u_n)$ *ha uno e un solo equilibrio di Nash.*

Dimostrazione. Se esiste un equilibrio di Nash, $(x_1*, x_2* \ldots, x_n*)$, in esso si devono annullare le derivate parziali $\delta u_i / \delta x_i$. Infatti, fissate le strategie degli altri giocatori, la funzione di utilitá u_i del giocatore i - esimo deve avere un massimo nel punto di ascissa x_i*. Dev'essere quindi:

$$\begin{aligned} \delta u_i/\delta x_i(x*_1, \ldots, x*_n) &= f(x*_1 +, \ldots, +x*_n) + x*_i \, f'(x*_1 + \ldots, +x*_n - C = \\ &= f(s*) + x*_i \, f'(s*) - C = 0 \end{aligned}$$

Da cui si ricava:

$$f(s*) + x*_i \, f'(s*) = C \qquad (2)$$

Ponendo in questa uguaglianza prima $i = 1$ e poi $i = 2$ e sottraendo membro a membro si ha :

$$(x_1 * - x_2*) f'(s*) = 0$$

e questo significa che $x_1* = x_2*$ oppure $f'(s*) = 0$. Ma $f'(s*)$ non puó essere 0 perché altrimenti dovrebbe essere $f(s*) = A$ e questo contrasta con la (2) perché $A > C$. Dev'essere quindi,$x_1* = x_2*$ e analogamente $x_2* = x_3* = \ldots = x_n*$. Indicando questo valore comune con $x*$, si ha $s* = nx*$ e quindi, la (2) diventa:

$$f(nx*) + x * f'(nx*) = C \tag{3}$$

Indichiamo ora con $g(x)$ il primo membro della (3)(con x al posto di $x*$) e facciamone la derivata:

$$g(x) = f(nx) + xf'(nx)$$

$$g'(x) = nf'(nx) + f'(nx) + nxf''(nx) < 0 \qquad \forall x \in [B/n, M/n]$$

Quindi, $g(x)$ é strettamente decrescente in $[B/n, M/n]$. Si ha $g(B/n) = A$ e $g(M/n) = Mf'(M)/n < 0$ e poiché $A > C$, nell'intervallo $[0, M/n]$ esiste un unico punto $x*$ in cui $g(x*) = C$, cioé vale la (3). Con ció abbiamo dimostrato che l'equilibrio di Nash, se esiste, é unico perché deve necessariamente coincidere col punto $(x*, x * \ldots, x*)$.
Resta da vedere che un equilibrio di Nash esiste davvero, cioé che il punto $X* = (x*, x * \ldots, x*)$ é effettivamente un equilibrio di Nash. Poiché $X*$ annulla tutte le derivate parziali $\delta u_i/\delta x_i$, basta far vedere che le derivate parziali seconde $\delta^2 u_i/\delta x_i^2$ sono <= 0 in tutto $[0, M]$ (perché allora, facendo variare la variabile x_i e tenendo fisse le altre al valore $x*$, la funzione di utilitá u_i presenta un massimo per $x_i = x*$). E infatti,

$$\delta^2 u_i/\delta x_i^2 = 2f'(x_1, \ldots, x_n) + x_i f''(x_1, + \ldots, +x_n) \leq 0$$

come volevasi dimostrare. ■

Poiché il gioco dei territori comuni ha uno e un solo equilibrio di Nash, se gli n pastori vogliono mettersi d'accordo prima su quante pecore far pascolare, sembrerebbe che la soluzione piú razionale sia quella di scegliere proprio questo equilibrio di Nash, cioé scegliere $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x*$. Solo cosí infatti, nessuno dei pastori ha interesse a tradire unilateralmente l'accordo. Peró in questo caso l'equilibrio di Nash ha un grave difetto: non é efficiente,nel senso che esiste un'altra scelta di strategie che permette a tutti i giocatori di guadagnare di piú. Se gli n pastori, invece di mettersi daccordo sull'equilibrio di Nash, si mettessero d'accordo per massimizzare l'*utilitá sociale* $u = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ e poi dividessero in parti uguali il guadagno,guadagnerebbero tutti di piú.
Infatti, l'utilitá sociale é data da :

$$\begin{aligned} u(x_1, \ldots, x_n) &= (x_1 + \ldots + x_n)f(x_1 + \ldots + x_n) - C(x_1 + \ldots + x_n) \\ &= sf(s) - C(s) = u(s) \end{aligned}$$

cioé u dipende solo dal numero totale $s = x_1 + \ldots + x_n$ di pecore al pascolo. Derivando $u(s)$ rispetto a s otteniamo:

$$\begin{aligned} u'(s) &= f(s) + sf'(s) - C \\ u'(B) &= A - C > 0 \\ u'(M) &= Mf'(M) - C < 0 \\ u''(s) &= 2f'(s) + sf''(s) < 0 \qquad \forall s \in [B, M] \end{aligned}$$
$$u''(s) \leq 0 \qquad \forall s \in [0, M]$$

Quindi, $u'(s)$ é decrescente in $[0, M]$, anzi, é strettamente decrescente in $[B, M]$. Allora, esiste un unico punto s' in $[0, M]$ tale che $u'(s') = 0$. Ció dimostra che $u(s)$ ha un unico punto di massimo in $[0, M]$ per $s = s'$.
Si puó provare che $s' < s*$ dove $s*$ é il valore di s nell'equilibrio di Nash. Infatti, $s* = nx*$ e dalla (3) si deduce che $f(s*) + f'(s*)s*/n = C$, ma allora $u'(s*) = f(s*) + s*f'(s*) - C = s*f'(s*)(n-1)/n < 0$. Poiché $u'(s') = 0$ e u' é decrescente, dev'essere $s' < s*$.
Posto $x' = s'/n$, se tutti i giocatori adottano la strategia x' $(< x*)$ e quindi, portano al pascolo meno pecore di quel che stabilisce l'equilibrio di Nash, guadagnano tutti di piú (guadagnano $u(s')/n$ anziché $u(s*)/n$ e $u(s') > u(s*)$).
A questo punto peró, uno dei pastori potrebbe essere tentato di "fare il furbo" e tradire unilateralmente l'accordo, perché cosí facendo potrebbe guadagnare ancora di piú; infatti, il punto $(x', x' \ldots, x')$ non é un equilibrio di Nash. Peró naturalmente, gli altri giocatori reagirebbero cambiando a loro volta la loro strategia e si avrebbe una successione di strategie che tende all'equilibrio di Nash, col risultato che tutti i giocatori guadagnerebbero meno del "massimo sociale" $u(s')/n$.
Per illustrare questo fatto mettiamoci in un caso particolare molto semplice: supponiamo che ci siano solo 2 giocatori, indichiamo le loro strategie con x, y (anziché x_1, x_2) e supponiamo che la funzione $f(s)$ sia lineare, cioé poniamo $f(s) = A(1 - s/M)$ (cosa non realistica). Si ha allora:

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= xf(x+y) - Cx = x\Big(A - C - A(x+y)/M\Big) \\ u_2(x, y) &= yf(x+y) - Cy = y\Big(A - C - A(x+y)/M\Big) \end{aligned}$$

L'equilibrio di Nash $(x*, y*)$ si trova ponendo $\delta u_1/\delta x = \delta u_2/\delta y = 0$:

$$\begin{aligned} \delta u_1/\delta x = A - C - A(x+y)/M - Ax/M = 0 \qquad M(A-C) &= A(2x+y) \\ \delta u_2/\delta y = A - C - A(x+y)/M - Ay/M = 0 \qquad M(A-C) &= A(x+2y) \end{aligned}$$

da cui $x = y = M(A-C)/3A$ e quindi l'equilibrio di Nash é dato da :

$$(x*, x*) = \Big(M(A-C)/3A, M(A-C)/3A\Big)$$

e l'utilitá di ciascuno dei 2 giocatori nell'equilibrio di Nash vale:

$$u_1(x*, x*) = M(A - C)^2/9A$$

Invece l'utilitá sociale $u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y)$ vale:

$$u(x, y) = (x + y)\Big(A - C - A(x + y)/M\Big) = s(A - C - As/M)$$

Il massimo dell'utilitá sociale si ha nel punto $s' = (x', x')$ e si trova ponendo $du/ds = 0$:

$$du/ds = A - C - aS/M - aS/M = A - C - 2aS/M = 0$$

da cui

$$s' = M(A - C)/2A \qquad x' = M(A - C)/4A$$

L'utilitá di ciascuno dei 2 giocatori nel punto (x', x') vale $u_1(x', x') = M(A - C)^2/8A$ e quindi, é maggiore dell'utilitá data dall'equilibrio di Nash.
I valori delle costanti A, C, M dipendono dalle unitá di misura usate. Supponiamo per comoditá che sia $A = M = 1$, $C = 0$. Allora, si ha:

$$\begin{array}{rl} u_1(x, y) = x(1 - x - y) & u_2(x, y) = y(1 - x - y) \\ (x*, x*) = (1/3, 1/3) & u_1(x*, x*) = u_2(x*, x*) = 1/9 \\ (x', x') = (1/4, 1/4) & u_1(x', x') = u_2(x', x') = 1/8 \end{array}$$

E la situazione puó essere rappresentata dalla figura 4.2: il punto $P = (1/3, 1/3)$ rappresenta l'equilibrio di Nash. Il punto $P_0 = (1/4, 1/4)$ rappresenta il massimo sociale. Le 2 rette $y = (1 - x)/2$ e $x = (1 - y)/2$ rappresentano le *curve di miglior risposta* dei 2 giocatori. Questo significa che, fissata la strategia y del secondo giocatore, la miglior risposta del primo giocatore é quella che rende massima la sua funzione di utilitá. Essa si indica con $r_1(y)$ e si ottiene ponendo $\delta u_1/\delta x = 1 - 2x - y = 0$, da cui $x = r_1(y) = (1 - y)/2$.
Analogamente la miglior risposta del secondo giocatore, indicata con $r_2(x)$, si ottiene ponendo $\delta u_2/\delta y = 1 - x - 2y = 0$, da cui $y = r_2(x) = (1 - x)/2$.
L'insieme degli equilibri di Nash, per definizione, é dato dell'intersezione delle 2 curve di miglior risposta e nel nostro caso contiene un solo punto , il punto $P = (1/3, 1/3)$.

Supponiamo che i 2 giocatori si siano messi d'accordo per la strategia che dá il massimo sociale, rappresentata dal punto $P_0 = (1/4, 1/4)$, che dá a ciascuno un guadagno $u_1(1/4, 1/4) = u_2(1/4, 1/4) = 1/8 = 0.125$.
A questo punto il primo giocatore puó essere tentato di "fare il furbo" e tradire l'accordo, spostandosi nel punto P_1 che sta sulla sua curva di

miglior risposta e ha coordinate $(3/8, 1/4)$. Cosí facendo il primo giocatore porta piú pecore al pascolo e aumenta il suo guadagno, guadagnando $9/64 = 0.141$ anziché $1/8 = 0.125$, mentre il secondo giocatore guadagna di meno ($3/32 = 0,094$ anziché 0,125).
Ma naturalmente il secondo giocatore in seguito reagirá spostandosi a sua volta sulla sua curva di miglior risposta, nel punto $P_2 = (3/8, 5/16)$ e aumentando a sua volta il numero di pecore al pascolo. A questo punto, come mostra la figura 4.2, il primo giocatore, se vuole aumentare di nuovo il suo guadagno, sará costretto a diminuire il numero delle pecore al pascolo. Si puó andare avanti cosí indefinitamente, costruendo una successione di punti $P_1, P_2, P_3 \ldots P_k, \ldots$ e si puó dimostrare che essa (in questo caso)tende all'equilibrio di Nash, come é chiaro anche dalla figura 4.2.

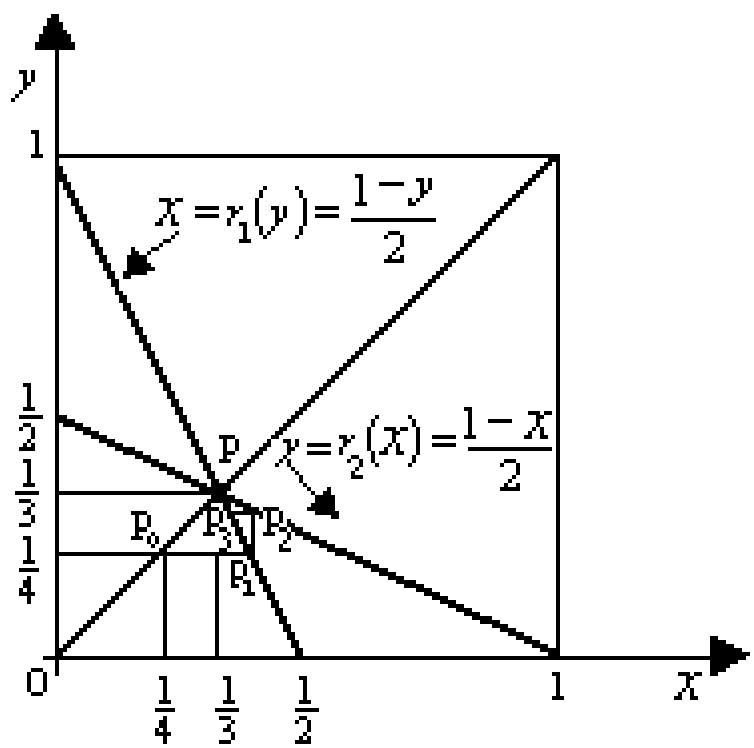

Figura4.2

I valori di x, y, u_1, u_2 per i punti $P_0, P_1, P_2, P_3 \ldots, P$ sono i seguenti:

	x	y	u_1	u_2
P_0	1/4	1/4	0,125	0,125
P_1	3/8	1/4	0.141	0.094
P_2	3/8	5/16	0.117	0.098
P_3	11/32	5/16	0.118	0.107
P	1/3	1/3	0.111	0.111

Qual é il risultato finale? che entrambi i giocatori si trovano a guadagnare meno di prima (o.111 anziché 0.125) e che il pascolo viene sfruttato piú di prima (il numero totale di pecore al pascolo é $2M/3$ anziché $M/2$) e si esaurisce piú in fretta. É chiaro che da questa storiella si puó ricavare una morale "ecologica" fin troppo ovvia.