

Sen e l'impossibilità di essere un paretiano liberale

Abbiamo un insieme C (supporremo in tutto quel che segue che C sia un insieme FINITO e che contenga ALMENO 3 ELEMENTI) e vogliamo scegliere un elemento $c \in C$, in modo da tenere conto delle preferenze \succeq_i (con $i = 1, \dots, n$) su C di un gruppo N di individui: $N = \{1, \dots, n\}$.

Come per Arrow consideriamo delle *social choice rule* esprimibili mediante aggregazione di preferenze. Cioè, ad un profilo di preferenze in $\mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \dots \times \mathcal{P} = \prod_{i=1}^n \mathcal{P} = \mathcal{P}^n$ vogliamo associare un preordine totale su C . Nota: con il simbolo \mathcal{P} è stato indicato l'insieme di tutti i preordini totali su C .

Diremo *social welfare function* una $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{P}$, dove $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}^n$.

Le condizioni che Sen impone a Φ sono le seguenti:

(U) [dominio universale]: Questa condizione richiede che $\mathcal{D} = \mathcal{P}^n$. Cioè si chiede che Φ sia definita per ogni profilo di preferenze.

(WP) [principio di Pareto (debole), o condizione di unanimità¹]:

$$\forall x', x'' \in C, \forall (\succeq_i)_{i \in N} \in \mathcal{D} : [x' \succ_i x'' \quad \forall i \in N] \Rightarrow x' \sqsupset_S x''$$

(L*) [liberalismo minimale]:

Esistono almeno due individui tali che per ciascuno di loro vi è almeno una coppia di alternative rispetto alle quali egli è decisivo. Ovvero, se egli preferisce c' a c'' , lo stesso deve valere per le preferenze della società.

Teorema (Sen, 1970). Non vi è alcuna $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{P}$ che soddisfi U, WP, ed L*.

Sen, A. (1970): *The Impossibility of a Paretian Liberal*, Journal of Political Economy, **78**, 152-157.

¹Indico per comodità $\Phi((\succeq_i)_{i \in N}) = \sqsupset_S$ dove il suffisso S sta ad indicare che sono le preferenze della società.

ADDENDA

Volendo, si può sviluppare un linguaggio, un modello formale in cui inserire la questione del “liberalismo minimale”. In questo modello, i *diritti* sono identificati con un insieme di coppie ordinate di elementi di C . Vediamo i dettagli.

Ad ogni individuo i è associato $D_i \subseteq C \times C$. Questo insieme di coppie ordinate rappresenta i diritti di i sulle coppie di alternative. Al di là del discorso formale che faremo, l'insieme D_i dovrebbe rappresentare quelle coppie sulle quali le preferenze di i sono determinanti, nel senso che la società non può fare altro che prenderne atto.

Possiamo assumere, per semplicità, che i diritti siano “two-way”, cioè che:

$$(x, y) \in D_i \Leftrightarrow (y, x) \in D_i$$

Possiamo “interpretare” questa condizione come rappresentante l'idea che i diritti di i “contano” sia in un verso che nell'altro. Cioè sia quando lui preferisce x ad y che quando le sue preferenze sono opposte. Non c'è ragione per cui non possa essere immaginato che vi siano dei diritti solo “unidirezionali”. Ripeto, la assunzione di “bidirezionalità” è essenzialmente una condizione che mettiamo per semplificare l'analisi.

Per evitare banalità, faremo anche le seguenti assunzioni:

- vi siano almeno due individui k ed m con D_k e D_m non vuoti
- che i diritti degli individui siano *non banali*, cioè che per ogni individuo i e per ogni $x \in X$ si abbia $(x, x) \notin D_i$
- che i diritti siano *esclusivi*, cioè che $\nexists i, j$ con $i \neq j$ ed x, y t.c. $(x, y) \in D_i \cap D_j$

Diciamo che un individuo i è *decisivo* (binariamente) su $\{x, y\}$ se²:

- $x \succ_i y \Rightarrow x \sqsupset_S y$
- $y \succ_i x \Rightarrow y \sqsupset_S x$

Principio di liberalismo (L)

Una regola di aggregazione Φ rispetta i diritti se:

$$\forall i, \forall x, y \in X [(x, y) \in D_i \Rightarrow i \text{ è decisivo su } \{x, y\}]$$

²Vedi nota precedente.

Il teorema di Sen dice che non esiste $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{P}$ che soddisfi (U), (WP) ed (L), nelle ipotesi che abbiamo fatto sui vari D_i .

Il risultato di Sen può anche essere trovato qui:

Sen, A. (1982): *Choice, welfare and measurement*, Cambridge University Press, Cambridge (MA, USA).

Descrivo qui un esempio che ho preso ed adattato da Navin Kartik.

Una osservazione preliminare. L'esempio di Sen viene usualmente presentato nel contesto delle social choice functions. Ma io continuo a rimanere nel contesto delle social welfare functions.

Abbiamo due individui, Anna e Bill. Le alternative sono 4 e sono V, A, B, N il cui significato è:

- V significa che sono entrambi vegetariani. O, per maggior precisione, che nessuno dei due mangia carne.
- A , rispettivamente B , significa che Anna, rispettivamente Bill, è vegetariana.
- N ovviamente indica che nessuno dei due lo è

CREDO BISOGNA PRECISARE MEGLIO. DIREI CHE SI TRATTA DI PRECISARE CHE AD ESEMPIO A VUOL DIRE CHE ANNA NON MANGIA CARNE E BILL INVECE SÌ. SE LA SOCIETÀ PREFERISCE A ALLE ALTRE ALTERNATIVE, POSSIAMO PENSARE CHE QUINDI DECIDA DI EMANARE UNA LEGGE CHE STABILISCA CHE ANNA NON MANGIA CARNE E INVECE BILL LA MANGIA ALMENO UNA VOLTA ALLA SETTIMANA.

Diciamo che possiamo pensare, per fissare le idee, che Anna sia vegetariana e Bill no. Anzi, che Bill sia convinto che si debba mangiare della carne.

Per quanto riguarda la struttura dei diritti, sembra sensato assumere che:

Anna è decisiva tra A ed N e tra B e V
 Bill è decisivo tra A e V e tra B ed N

Si noti che si tratta di diritti "two way" (e si noti che sono rispettate anche le condizioni di non banalità e di esclusività).

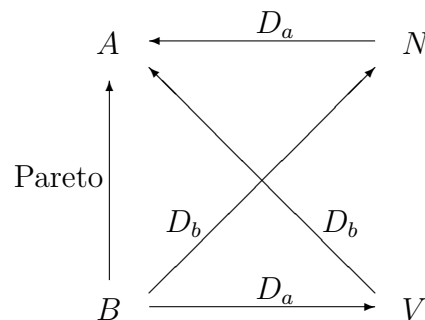
Ed è ovvia l'idea che ci sta dietro: ognuno ha diritti sulla componente dello stato del mondo (o alternativa) che lo riguarda.

Se Anna e Bill hanno preferenze "normali", si ha il paradosso? No.

Abbiamo:

Anna: $V \succ_a A \succ_a B \succ_a N$
 Bill: $N \succ_b A \succ_b B \succ_b V$

Possiamo creare un diagramma, nel quale le frecce indicano come *devono* essere le preferenze sociali se vogliamo rispettare la condizione di Pareto o il liberalismo (decisiveness). I nomi dati alle frecce sono autoespliciti.:



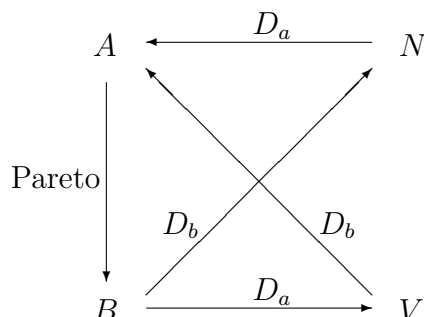
Non si ha nulla di strano. Le preferenze sociali potrebbero ad esempio soddisfare: $A \sqsupset_S N \sim_S V \sqsupset_S B$. Queste preferenze non violano né la decisiveness né la condizione di Pareto.

Passiamo invece ora a considerare il caso in cui i due decisori abbiano preferenze “integraliste” (tipo quelle dell’esempio classico, basato su “L’amante di Lady Chatterley”). Vi sono due individui: Lewd e Prude. Lewd vuole leggere il libro, ma preferisce lo stato del mondo in cui è Prude a leggerlo. Analogamente, a Prude non piace assolutamente leggere quel libro osceno, ma ancor meno il fatto che Lewd lo legga. E’ pareto ottimale che Lewd non legga il romanzo e che Prude lo legga. Ma questo contrasta col principio di liberalismo).

Cioè assumiamo che le preferenze siano le seguenti (il vegetariano è più contento che l’altro non mangi carne che se lui stesso non ne mangia, e reciprocamente):

$$\begin{aligned} \text{Anna: } & V \succ_a B \succ_a A \succ_a N \\ \text{Bill: } & N \succ_b B \succ_b A \succ_b V \end{aligned}$$

Possiamo usare un diagramma analogo a sopra.



È evidente dalla figura che c'è un "ciclo": $A \sqsubset_S B \sqsubset_S V \sqsubset_S A$ e quindi \sqsubseteq_S non può essere transitiva.

Volendo, possiamo fare anche una verifica dell'impossibilità usando W come facciamo nell'esempio sotto (di Kartik).

Si può anche osservare che la presenza della alternativa N è del tutto inutile.

Quello che non so è se questo esempio di preferenze integraliste, che certamente illustra il risultato di Sen nel contesto delle social welfare functions, possa illustrare anche il caso in cui si lavori con le social choice functions.

Kartik fa l'esempio seguente di preferenze, che non mi pare si possano interpretare agevolmente nel contesto in cui siamo, contrariamente ai due profili di preferenze visti sopra. Naturalmente, occorre ricordare che vale U , cioè il fatto che la regole di aggregazione deve funzionare qualunque siano le preferenze.

Anna: $B \succ_a V \succ_a N \succ_a A$
 Bill: $V \succ_b N \succ_b B \succ_b A$

E trova una contraddizione tra il principio di Pareto ed il liberalismo minimale. Lui la trova in termini di social choice function, ma la possiamo adattare al contesto. Supponiamo che ci sia un preordine totale sociale \sqsubseteq_S e sia W l'insieme dei massimi rispetto a \sqsubseteq_S sull'insieme delle 4 alternative. Visto che abbiamo un preordine totale su un insieme non vuoto e finito, tale massimo esiste certamente. Quindi $W \neq \emptyset$.

Supponiamo $A \in W$. Non può essere, in quanto B domina paretianamente A

Supponiamo $B \in W$. Ma Bill è decisivo fra B ed N , ed egli preferisce strettamente N a B , quindi deve essere $N \sqsubset_S B$

Supponiamo $N \in W$. Non può essere, in quanto V domina paretianamente N

Supponiamo $V \in W$. Ma Anna è decisiva fra V e B , ed ella preferisce strettamente B a V , quindi deve essere $B \sqsupset_S V$