

## Metodo di Borda e teorema di Arrow

Abbiamo un insieme  $C$  (supporremo in tutto quel che segue che  $C$  sia un insieme FINITO) e vogliamo scegliere un elemento  $c \in C$ , in modo da tenere conto delle preferenze  $\succeq_i$  (con  $i = 1, \dots, n$ ) su  $C$  di un gruppo  $N$  di individui:  $N = \{1, \dots, n\}$ .

**Esempio 1 (regola di Borda)** Ad ogni elemento di  $C$  assegniamo un punteggio sulla base delle preferenze dei vari individui (ad esempio,  $k$  all'elemento preferito,  $k - 1$  al successivo e così via, individuando anche cosa fare nel caso che individui classifichino alternative diverse a pari merito) e poi sommiamo. La nostra regola di aggregazione, che indichiamo con  $f$ , sceglie gli elementi di  $C$  che ottengono il punteggio massimo.

**Esempio 2 (continuato)** *Votazioni: manipolabilità della regola di Borda.* La regola funziona in questo modo: ogni votante classifica le varie alternative, e di conseguenza a queste viene assegnato un punteggio (1 punto all'ultima alternativa, 2 punti alla penultima, etc ...). Poi si fa la somma dei punteggi e si sceglie la alternativa che ha ottenuto lo *score* massimo.

Ricordo che la regola di Borda è spesso citata per una sua altra caratteristica interessante (pur se piuttosto prevedibile, dato il modo in cui è definita): viola la considerazione di *indipendenza dalle alternative irrilevanti* ("independence from irrelevant alternatives", da cui la sigla *IIA*). Come mostra il seguente semplicissimo esempio:

3 alternative ( $A, B, C$ ) e 5 votanti:

classif.	pti	1	2	3	4	5
I	3	C	C	B	B	B
II	2	A	A	C	C	C
III	1	B	B	A	A	A

C 12 punti: vince

B 11 punti

A 7 punti

Se sparisce l'alternativa A, si ha:

class.	p.ti	1	2	3	4	5
I	2	C	C	B	B	B
II	1	B	B	C	C	C

B 8 punti: vince  
c 7 punti.

Torniamo comunque allo scopo fondamentale per cui abbiamo citato la regola di Borda: la sua manipolabilità. E' sufficiente che gli individui 3, 4, 5 dichiarino preferenze diverse dalle loro vere. Ad esempio:

classif.	pti	1	2	3	4	5
I	3	C	C	B	B	B
II	2	A	A	A	A	A
III	1	B	B	C	C	C

C 9 punti ora perde  
B 11 punti ora vince  
A 7 punti

Cioè, ai tre tizi che volevano  $B$  è bastato dire che loro preferiscono  $A$  a  $C$  per far vincere  $B$ .  
SI NOTI CHE NON E' CASUALE AVERE MANIPOLABILITA' IN PRESENZA DI VIOLAZIONE DELLA CONDIZIONE DI IIA.

Un altro esempio è il seguente.

Si immaginino 2 squadre (di ciclisti) costituite da 3 ciclisti ciascuna. Chiamo  $A, B, C$  i tre ciclisti della prima squadra e  $D, E, F$  quelli della seconda. Sono queste le 6 alternative tra le quali dobbiamo scegliere la *migliore* (il ciclista più bravo). L'analogo dei *votanti* è costituito da un certo numero di gare che devono sostenere. Abbiamo 3 gare, e quindi 3 votanti. Questi sotto sarebbero i risultati di 3 gare disputate *onestamente* (nelle caselle metto i punteggi):

	A	B	C	D	E	F
Igara	2	4	5	6	3	1
IIgara	2	4	5	6	1	3
IIIgara	6	5	4	3	2	1
TOT	10	13	14	15	6	5

Vince  $D$ , che ottiene il punteggio massimo, davanti a  $C$ .

Come si vede dalla tabella, nella terza gara i ciclisti della prima squadra sono arrivati ai primi tre posti. Ebbene, supponiamo che ciò sia successo perché sono andati in fuga e hanno staccato gli altri tre. Se è così, loro possono decidere a loro piacimento chi fare vincere, chi arrivare secondo e terzo. Ad esempio:

	A	B	C	D	E	F
Igara	2	4	5	6	3	1
IIgara	2	4	5	6	1	3
IIIgara	5	4	6	3	2	1
TOT	9	12	16	15	6	5

Vince C, davanti a D.

Si noti che le posizioni degli altri ciclisti nella classifica finale restano inalterate (in particolare, quindi, A e B non sono danneggiati). E si noti anche come la seconda squadra non abbia possibilità di *contro - manipolare* il risultato dell'ultima gara.

La regola di Borda ha in sé una arbitrarietà, e cioè l'assegnazione dei punteggi.

Pensiamo alla "Formula 1".

Abbiamo un certo numero di gare. Ciascuna gara può essere vista come il fatto che un circuito particolare esprime le sue preferenze sui piloti. Queste preferenze sono convertite in punteggi e poi vengono sommate.

Oltre che a prestarsi a manipolazioni (vedi Barrichello che fa vincere Schumaker), la assegnazione di punteggi diversi (pur rispettando "ovviamente" l'ordine d'arrivo: i punteggi non sono altro che funzioni di utilità che comunque rispettano le preferenze; ovviamente uno non si sogna di dare un punteggio migliore ad uno che si è classificato peggio) può avere l'effetto di determinare un vincitore anziché un altro.

Vedi:

[classifica.asp.html](#)

[classifica2003\\_con\\_regole\\_2002.asp.html](#)

da:

<http://www.f1gp.it/campionati/2003/classifica.asp>

Altro esempio è fornito dalle regole di assegnazione del punteggio in un campionato (es.: quello di calcio, in cui si assegnano tre punti per la vittoria anziché i due in uso una volta).

**Esercizio 1** C'è qualche campionato d'Italia per il quale lo scudetto sarebbe

stato assegnato ad una squadra diversa, se la vittoria fosse stata conteggiata con la regola diversa da quella in uso in quel campionato?

C'è un modo per *costruire* una social choice rule *accettabile*? La risposta data da Arrow è negativa, per lo meno se si considerano delle *social choice rule* esprimibili mediante aggregazione di preferenze. Cioè, se ad ogni profilo di preferenze in  $\mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \dots \times \mathcal{P} = \prod_{i=1}^n \mathcal{P} = \mathcal{P}^n$  vogliamo associare un preordine totale su  $C$ . Nota: con il simbolo  $\mathcal{P}$  è stato indicato l'insieme di tutti i preordini totali su  $C$ .

Diremo *social welfare function* una  $\Phi : \mathcal{P}^n \rightarrow \mathcal{P}$ . Ovviamente, data una  $\Phi$  possiamo ottenere facilmente una  $f$ , scegliendo l'elemento (o gli elementi) di  $C$  che sono preferiti per il preordine totale  $\Phi(\succeq_1, \dots, \succeq_n)$  e questo per ogni  $(\succeq_1, \dots, \succeq_n) \in \mathcal{P}^n$ .

Cerchiamo allora una  $\Phi$  che soddisfi condizioni ragionevoli:

(U) [dominio universale]: Questa condizione è già stata imposta implicitamente assumendo che  $\Phi$  sia definita su  $\mathcal{P}^n$ , ovverossia richiedendo che  $\Phi$  sia definita per ogni profilo di preferenze

(P) [principio di Pareto, o condizione di unanimità<sup>1</sup>]:

$$\forall c', c'' \in C, \forall (\succeq_i)_{i \in N} : [c' \succ_i c'' \quad \forall i \in N] \Rightarrow c' \sqsupset c''$$

(IIA) [indipendenza delle alternative irrilevanti]:

$$\forall (\succeq_i)_{i \in N}, \forall (\succeq'_i)_{i \in N}, \forall c, d \in C : ([c \succeq_i d \Leftrightarrow c \succeq'_i d]) \Rightarrow (c \sqsupset_i d \Leftrightarrow c \sqsupset'_i d)$$

L'interpretazione di (IIA) è che, nel voler determinare le preferenze *collettive* tra due alternative  $c, d$ , io devo guardare solo alle preferenze dei vari individui relativamente a  $c$  e  $d$ . Gli altri elementi non c'entrano. Come già visto, la regola di Borda è un esempio di violazione di (IIA).

**Teorema** (Arrow, 1951 e 1963). Sia  $\Phi : \mathcal{P}^n \rightarrow \mathcal{P}$  che soddisfi  $P, IIA$  (ricordo che  $U$  vale, per come abbiamo imposto essere il dominio di  $\Phi$ ). Allora  $\Phi$  è dittatoriale.

<sup>1</sup>Indico per comodità  $\Phi((\succeq_i)_{i \in N}) = \sqsupset$ .