1 Modellizzazione di un problema di decisione

$$X \xrightarrow{h} E \xrightarrow{u} \mathbb{R}$$

L'insieme X è l'insieme delle alternative (scelte, decisioni, azioni...).

La funzione h rappresenta il dato oggettivo, che lega le alternative alle conseguenze.
Data l'alternativa $x \in X$, $h(x)$ identifica la sua conseguenza.

La funzione u rappresenta la valutazione soggettiva che l'individuo dà del risultato.
Data una conseguenza $e \in E$, $u(e)$ identifica la valutazione che il decisore fa della conseguenza e

La composizione $u(h(x))$, che indicherò con $f(x)$, mappa direttamente la alternativa x nella sua valutazione.

Si noti. Stiamo considerando una situazione:

- DETERMINISTICA (non sono coinvolti elementi di rischio/incertezza)
- UNICO DECISORE (contrapposto al caso in cui siano presenti più decisori)
- UNI-DIMENSIONALE (contrapposto ai problemi di decisione multi-obiettivo)

Estensione. Considerare:

$$(X_1 \times X_2 \ldots \times X_m) \times S \xrightarrow{h} E \xrightarrow{u} (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ldots \times \mathbb{R})$$

$X_1 \times X_2 \ldots \times X_m$ ci permette di considerare più decisori

S ci consente di tenere presenti gli aspetti non deterministici

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ldots \times \mathbb{R}$ ci permette di considerare sia il caso di più decisori che di più criteri

Cominciamo col caso delle decisioni in condizioni di rischio o incertezza. Consideriamo:

$$(X \times S) \xrightarrow{h} E$$

Gli elementi di S li interpretiamo come "stati di natura"

$X \backslash$ S	s_1	$\ldots$	s_r
x_1		$\ldots$	
$\ldots$			
x_m		$\ldots$	

Riempiamo la tabella con le conseguenze:

$X \backslash$ S	s_1	$\ldots$	s_r
x_1	e_{11}	$\ldots$	e_{1r}
$\ldots$			
x_m	e_{m1}	$\ldots$	e_{mr}

e_{ij} rappresenta la conseguenza della *azione* "i" e dello *stato di natura* "j"

Se vogliamo mettere in evidenza il legame esistente tra scelte e stati di natura da una parte e conseguenze dall'altra, possiamo usare la funzione h:

$X \setminus$ S	s_1	$\dots$	s_r
x_1	$h(x_1, s_1)$	$\dots$	$h(x_1, s_r)$
$\dots$			
x_m	$h(x_m, s_1)$	$\dots$	$h(x_m, s_r)$

Introduciamo la valutazione del decisore, ovvero $u : E \longrightarrow \mathbb{R}$:

$X \setminus$ S	s_1	$\dots$	s_r
x_1	$u(e_{11})$	$\dots$	$u(e_{1r})$
$\dots$			
x_m	$u(e_{m1})$	$\dots$	$u(e_{mr})$

Possiamo sintetizzare, usando la funzione f:

$$X \times S \xrightarrow{h} E \xrightarrow{u} \mathbb{R}$$
$$X \times S \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$X \setminus$ S	s_1	$\dots$	s_r
x_1	$f(x_1, s_1)$	$\dots$	$f(x_1, s_r)$
$\dots$			
x_m	$f(x_m, s_1)$	$\dots$	$f(x_m, s_r)$

Un primo esempio di aggregazione:

VALORE ATTESO

Ad ogni alternativa $x \in X$ associamo:

$$\sum_{k=1}^{r} p(s_k) f(x, s_k)$$

Il fattore $p(s_k)$ indica la *probabilità* che assegniamo allo stato s_k.

Due casi:
- rischio (la probabilità è oggettiva)
- incertezza (la probabilità è soggettiva)

Vediamo ora il caso delle decisioni in cui vi siano più criteri. Consideriamo:

$$X \xrightarrow{h} E \xrightarrow{u} (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ldots \mathbb{R})$$

Riscriviamo la tabella "vuota":

$X \setminus$ S	s_1	$\ldots$	s_r
x_1		$\ldots$	
$\ldots$			
x_m		$\ldots$	

Riempiamo la tabella con le conseguenze:

$X \setminus$ S	s_1	$\ldots$	s_r
x_1	e_{11}	$\ldots$	e_{1r}
$\ldots$			
x_m	e_{m1}	$\ldots$	e_{mr}

Qui le varie colonne possono rappresentare:
- i vari soggetti ("stakeholders")
- i vari criteri (decisione multi-obiettivo)
- i vari "tempi" (decisioni finanziarie)

e_{ij} rappresenta la conseguenza della *azione* "i" *per* "j"

Se vogliamo mettere in evidenza il legame esistente tra scelte e stati di natura da una parte e conseguenze dall'altra, possiamo usare la funzione h:

$X \diagdown S$	s_1	$\dots$	s_r
x_1	$h_1(x_1)$	$\dots$	$h_r(x_1)$
$\dots$			
x_m	$h_1(x_m)$	$\dots$	$h_r(x_m)$

Introduciamo le valutazione dei decisori, ovvero i vari criteri, ovvero le valutazioni ai vari tempi $u_j : E \longrightarrow \mathbb{R}$:

$X \diagdown S$	s_1	$\dots$	s_r
x_1	$u_1(e_{11})$	$\dots$	$u_r(e_{1r})$
$\dots$			
x_m	$u_1(e_{m1})$	$\dots$	$u_r(e_{mr})$

Possiamo sintetizzare, usando le funzioni f_j:

$$X \xrightarrow{h} E \xrightarrow{u_j} \mathbb{R}$$

$$X \times S \xrightarrow{f_j} \mathbb{R}$$

$X \diagdown S$	s_1	$\dots$	s_r
x_1	$f_1(x_1)$	$\dots$	$f_r(x_1)$
$\dots$			
x_m	$f_1(x_m)$	$\dots$	$f_r(x_m)$

Altri due esempi di aggregazione:

VALORE ATTUALE

Ad ogni alternativa $x \in X$ associamo:

$$\sum_{k=1}^{r} \nu^k f_k(x)$$

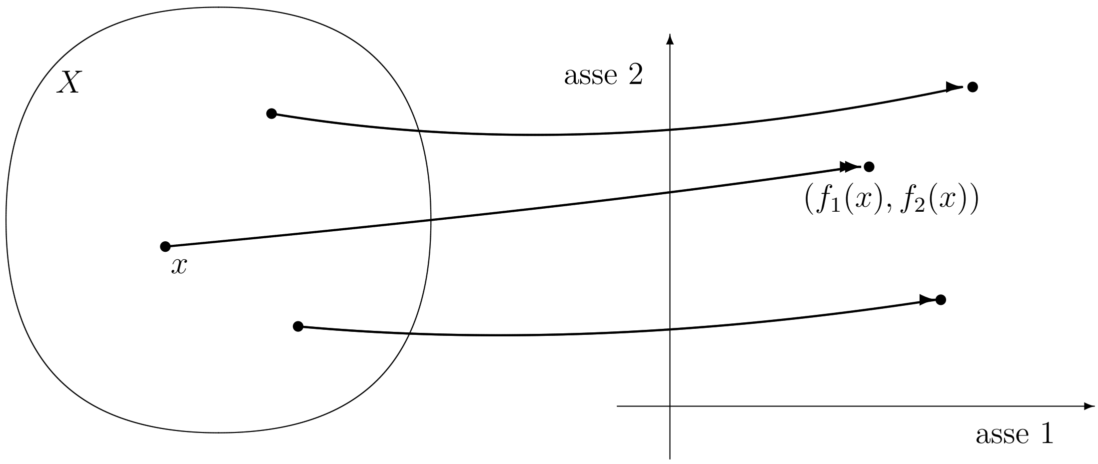
ν indica il fattore di sconto, e pertanto il fattore ν^k indica quanto vale "ora" una somma monetaria in entrata o uscita al tempo ("anno") k.

SCALARIZZAZIONE IN OTTIMIZZAZIONE MULTI-CRITERIO

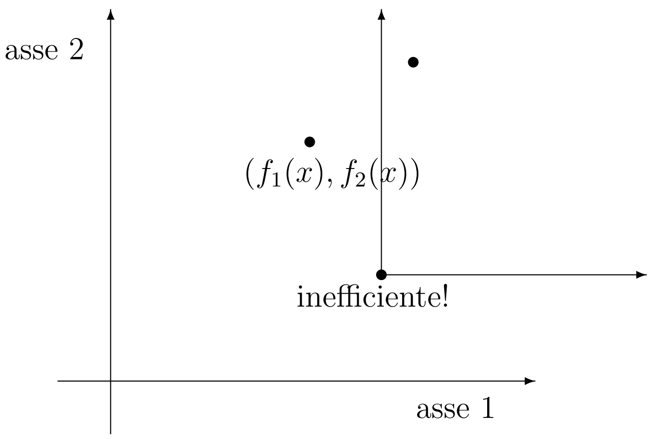
Ad ogni alternativa $x \in X$ associamo:

$$\sum_{k=1}^{r} \alpha_k f_k(x)$$

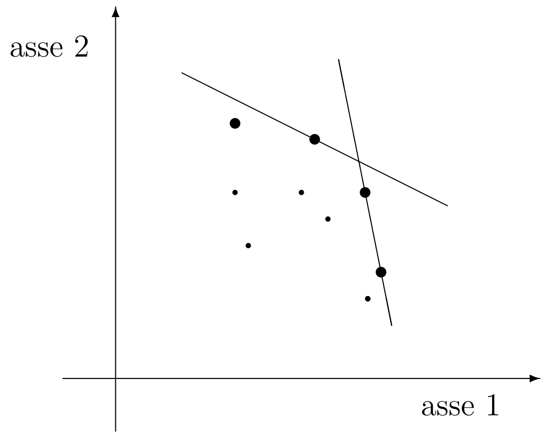
α_k indica il "peso" che assegniamo allo "stakeholder" k, ovvero al criterio k.



Vediamo i valori ottenuti:



Vediamo i valori ottenuti:



Vediamo in figura la scelta di due sistemi diversi di pesi. Naturalmente, l'uso di sistemi di pesi diversi può avere come effetto che vengano scelte delle alternative diverse.